高数上历年期末试题

-----基石数学爱好者协会

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2004.1.

一、单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）(本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $f'(a)=$（　　）

（A）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}$；　（B）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$；

（C）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{h}$；　（D）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

2．函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a，b]$ 上可导的充分条件是：$f(x)$ 在 $[a，b]$ 上（　　）

（A）有界；（B）连续；（C）有定义；（D）仅有有限个间断点.

3．若 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b$，当 $x\to\infty$ 时为无穷小，则（　　）

（A）$a=1，b=1$；（B）$a=1，b=-1$；（C）$a=-1，b=-1$；（D）$a=-1，b=1$.

4．设 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & 当x\ge0\\ 2x, & 当x<0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在；（B）$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，但在 $x=0$ 处不连续；

（C）$f'(0)$ 存在；　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导.

5．$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$ 的（　　）间断点.

（A）跳跃；（B）可去；（C）无穷；（D）振荡.

二、填空题（将正确答案填在横线上，本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan nx}{\tan mx}$（其中 m,n 为正整数）= ________ .

2．$\int\dfrac{x+(\arctan x)^2}{1+x^2}dx=$ __________ .

3．$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}=$ _________ .

4．设 $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\ne0\\ a, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ___________ .

5．为使曲线 $y=ax^3+bx^2$ 有拐点(1, 3)，则系数 $a=$ _______，$b=$ ________ .

三．试解下列各题（7×6=42 分）

1．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$.

1．设 $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$，求 y'.

2．求参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2}\\ y=1-t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3．设 $y+e^{y}+\ln(\cos\sqrt{x})=0$，求 dy.

4．计算不定积分 $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx$.

5．计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^{3}x}dx$.

6．计算广义积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^{2})}$.

四、应用题（本题 16 分，每小题 8 分）

1．求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

2．在曲线 $y=\frac{1}{x^{2}}$ 上求一点 M, 使过该点的切线被两坐标轴所截得的长度最短，并求出这最短的长度.

五、证明题（本题 12 分，每小题 6 分）

1．证明不等式 $e^{x}>ex$，$(x>1)$

2．设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续，在（0,1）内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明在（0,1）内有一点 ξ，使 $f'(\xi)=1$.

2004.1

一、 (1) D; (2) B; (3) B; (4) D; (5) B.

二、(1) $\frac{n}{m}$; (2) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{3}(\arctan x)^3$+C;

(3) e^{-18}; (4) 0; (5) $-\frac{3}{2},\frac{9}{2}$.

三、1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

2. $y'=\arcsin\frac{x}{2}+\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}$.

3. $\frac{dy}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{t},\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=(-\frac{1}{t})'_t\cdot\frac{dt}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{t^3}$.

4. $y'+y'\mathrm{e}^y+\frac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$

dy=$\frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+e^y)}$dx.

5. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}\ln x-2\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

令$\sqrt{x+1}$=t, 有$\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$=2$\sqrt{x+1}$+ln$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$

所以原式=2$\sqrt{x+1}$ ln$x$–4$\sqrt{x+1}$ -2 ln$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$+C .

6. 原式=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{\cos x}dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}d\cos x=\frac{4}{3}$.

7. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)_1^{+\infty}$

$=\left(\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2$.

四、(1) V=$2\pi\int_0^a y^2(x)dx=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})dx$

$=2\pi\int_0^a(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx$

$=\frac{32}{105}\pi a^3$.

(2) 设点 M(t,$\frac{1}{t}$) 即为所求的切点(也可设为($x_0,\frac{1}{x_0}$)),显然$t\neq 0$,

切线方程为 $y-\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{t^3}(x-t)$

两截距分别为 $\frac{3t}{2},\frac{3}{t^2}$,于是起线段长为 l=$\sqrt{\left(\frac{3t}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{t^2}\right)^2}$,于是问题等价于求

$f(t)$= $\frac{t^2}{4}+\frac{1}{t^4}$ 在$(0,+\infty)$内的最小值点.

由 $f'(t)=\frac{t}{2}-\frac{4}{t^5}$=0, 得唯一驻点为$t$=$\sqrt{2}$, 且$f''(\sqrt{2})>0$, t=$\sqrt{2}$是唯一的极小值点. 由实际问题可知, t=$\sqrt{2}$是最小值点, 故点($\pm\sqrt{2},\frac{1}{2}$)即为所求的点, 且最短距离为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

五、证明:

(1) 令 $f(x)=e^x-ex(x\ge 1)$, 则 $f'(x)=e^x-e>0\ (x>1)$,

所以 $f(x)$在 $x\ge 1$ 单调增加, 所以当 $x>1$ 时, $f(x)>f(1)=0$, 即 $e^x>ex(x>1)$. 证毕

(2) 设 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$在$[0,1]$闭区间上连续, 在$(0,1)$内可导,

$$F(1)=f(1)-1<0,\quad F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-1=\frac{1}{2}>0,$$

由介定理知存在 $\xi_1\in(\frac{1}{2},1)$, 使 $F(\xi_1)=0$. 又 $F(0)=0$, 由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=1$. 证毕

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2005.1.

一、填空题（本题 20 分，每小题 4 分）

1．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 a = _______ .

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，当 a = ____ , b = _____ 时，$f(x)$ 在 x =1 处可导.

3．方程 $x^7+x-1=0$ 共有 ______个正根.

4．当 $x=$_____ 时，曲线 $y=ax^2+bx+c$ 的曲率最大.

5．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=$______ .

二、选择题（本大题 24 分，共有 6 小题，每小题 4 分）

1．下列结论中，正确的是（　　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

（B）发散数列必然无界；

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n-1}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

（D）有界数列必然收敛.

2．函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，则必有（　　）.

（A）$f'(x_0)=0$；　　（B）$f''(x_0)<0$；

（C）$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在；　　（D）$f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$.

3．函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导的充分条件是：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（　　）

（A）有界；　（B）连续；　（C）有定义；　（D）仅有有限个间断点.

4．设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则必有关系式（　　）

（A）$N<P<M$；　（B）$N<M<P$；　（C）$M<P<N$；　（D）$P<M<N$.

5．设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，则必有（　　）.

（A）x_0 是极值点，$(x_0, f(x_0))$ 不是拐点；

（B）x_0 是极值点，$(x_0, f(x_0))$ 不一定是拐点；

（C）x_0 不是极值点，$(x_0, f(x_0))$ 是拐点；

（D）x_0 不是极值点，$(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

6．直线 L: $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 π: $4x-2y-2z=3$ 的位置关系是（　　）

（A）L 与 π 平行但 L 不在 π 上；　（B）L 与 π 垂直相交；

（C）L 在 π 上；　（D）L 与 π 相交但不垂直.

6*．微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}+e^{3x}$ 的特解形式为（　　）

(A) $y^*=x(ax+b)e^{2x}+cxe^{3x}$；　（B）$y^*=ae^{2x}+b(x+c)e^{3x}$；

（C）$y^*=(ax+b)e^{2x}+ce^{3x}$；　(D) $y^*=(ax+b)e^{2x}+cxe^{3x}$

三、计算下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1．计算$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$.

3． 求$\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx$

4． 设$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

5． 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$.

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．在半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱体，求此时圆柱体体积的最大值以及底半径与高的值.

2．计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形的面积以及此图形绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体的体积.

3． 在由平面$2x+y-3z+2=0$和平面$5x+5y-4z+3=0$所决定的平面束内求两个相互垂直的平面，其中一个经过点$M_0(4,-3,1)$.

3*. 在曲线上每一点$M(x,y)$处切线在 y 轴上的截距为$2xy^2$，且曲线过点$M_0(1,2)$．求此曲线方程.

五、(7 分) 设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在（0，3）内可导，且有$\frac{1}{3}\int_0^1 xf(x)dx=f(3)$．试证：必有$\xi\in(0,\ 3)$使$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

2005.1

一、填空题，每小题 4 分,共 5 小题，其中第 2 题 $-1,2$ 添对一个、错一个给 2 分.

(1) ln3;　(2) -1、2;　(3) 1;　(4) $-\dfrac{b}{2a}$;　(5) 1.

二、选择题，每小题 4 分,共 6 小题.

(1) A;　(2) C;　(3) B;　(4) D;　(5) C;　(6) A..

三、计算题，每小题 7 分,共 4 小题.

1. 解法一：设 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$,dx=tdt,x=0 时,t=1,x=4 时,t=3,

原式$=\int_1^3 \dfrac{\frac{1}{2}(t^2-1)+2}{t}tdt=\dfrac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^3}{3}+3t\right]_1^3=\dfrac{22}{3}$,

解法二：原式$=\int_0^4(x+2)d\sqrt{2x+1}$

$=(x+2)\sqrt{2x+1}\,\Big|_0^4-\dfrac{1}{2}\int_0^4\sqrt{2x+1}d(2x+1)$

$=16-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\dfrac{22}{3}$

解法三：原式$=\dfrac{1}{2}\int_0^4\dfrac{(2x+1)+3}{\sqrt{2x+1}}dx$

$=\dfrac{1}{4}\int_0^4\sqrt{2x+1}d(2x+1)+\dfrac{3}{4}\int_0^4\dfrac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4+\dfrac{3}{4}\cdot 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^4=\dfrac{2}{3}$.

2. 解法一：原式$=\int\dfrac{\frac{1}{2}(2x+4)-2}{x^2+4x+5}dx$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-2\int\dfrac{d(x+2)}{1+(x+2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-2\arctan(x+2)+C$.

(不加任意常数扣一分,不加绝对值符号不扣分,下同).

解法二：设 x+2=t，则 dx=dt,

原式$=\int\dfrac{t-2}{t^2+1}dt$

$=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{t^2+1}d(t^2+1)-2\int\dfrac{1}{t^2+1}dt$

$=\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)-2\arctan t+C$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-2\arctan(x+2)+C$.

解法三：设 x+2=tant，则 dx=sec²tdt,

原式$=\int(\tan t-2)dt=-\ln\left|\cos t\right|-2t+C$

$=-\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}}-2\arctan(x+2)+C$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-2\arctan(x+2)+C$.

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2},\dfrac{d^2y}{dx^2}=(\dfrac{t}{2})'_t\cdot\dfrac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{t}+t)$

4. 解法一：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\dfrac{1}{x}-\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\left(\frac{1}{x}=t\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t\ )}=\frac{1}{2}.$$

解法二：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{\frac{-2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)-x^2}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

四、1. 解法一：设圆柱体底半径为 r, 高为 $2h$, 体积为 V, 则

$$h^2+r^2=R^2,\ \ V=\pi r^2\cdot 2h=2\pi h(R^2-h^2)$$

$$\frac{dV}{\mathrm{d}h}=2\pi R^2-6\pi h,\ 令\frac{dV}{\mathrm{d}h}=0,得\ \ h=\frac{\sqrt{3}R}{3}$$

此时, $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$. 又$\dfrac{d^2V}{\mathrm{d}h^2}=-6\pi h<0$,

故$h=\dfrac{\sqrt{3}R}{3}$为极大值点, 由于驻点唯一, 故该点为最大值点, $V_{\max}=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

解法二：设圆柱体底半径为 r, 高为 h, 体积为 V, 则

$$(\frac{h}{2})^2+r^2=R^2,\ \ V=\pi r^2\cdot h=\pi(R^2h-\frac{h^3}{4})$$

$$\frac{dV}{\mathrm{d}h}=\pi(R^2-\frac{3}{4}h^2),\ 令\frac{dV}{\mathrm{d}h}=0,得\ \ h=\frac{2\sqrt{3}R}{3},$$

此时, $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$. 又$\dfrac{d^2V}{\mathrm{d}h^2}=-\dfrac{3}{2}\pi h<0$,

故$h=\dfrac{\sqrt{3}R}{3}$为极大值点, 由于驻点唯一, 故该点为最大值点, $V_{\max}=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

(不求$\dfrac{d^2V}{\mathrm{d}h^2}$,用一阶导数判定,或说明”由实际问题可知,唯一驻点就是最大值点也可”)

2. 解法一：设所求面积为 A, 体积为 V, 则

$$A=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=\pi ab.$$

$$V=2\pi\int_0^a\left[\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ \right]^2dx$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{4\pi}{3}ab^2.$$

解法二：令 $x=a\cos t, y=b\sin t,\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ ，则

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-\sin t)dt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt = 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ \pi ab\,.$$

$$V = 2\pi\int_0^b 2y\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}dy$$

$$=4\pi\frac{a}{b}(-\frac{1}{2})\cdot\frac{2}{3}(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^b$$

$$=\frac{4\pi}{3}ab^2\,.$$

3. 解法一：设曲线过 $M(x, y)$的切线方程为$Y-x=y'(X-x)$，

令 X=0，得$Y_b=y-xy'$，得 *bernoulli* 方程为$\begin{cases} y-xy'=2xy^2, \\ y(1)=2. \end{cases}$

令$z=y^{-1}$,得$\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{1}{x}z=2$，解之得$z=x+\dfrac{C}{x}$，即$z=y^{-1}$，$y^{-1}=x+\dfrac{C}{x}$.

代入初始条件 $y(1)$=2，得 C=$-\dfrac{1}{2}$，即所求曲线为 y=$\dfrac{2x}{2x^2-1}$.

解法二. 设曲线过 $M(x, y)$的切线方程为$Y-x=y'(X-x)$，

令 X=0，得$Y_b=y-xy'$，得 *bernoulli* 方程为$\begin{cases} y-xy'=2xy^2, \\ y(1)=2. \end{cases}$

令$u=\dfrac{y}{x}$,得$\dfrac{du}{dx}=-2xu^2$，解之得$\dfrac{1}{u}=x^2+C$，即$\dfrac{x}{y}=x^2+C$

代入初始条件 $y(1)$=2，得 C=$-\dfrac{1}{2}$，即所求曲线为 y=$\dfrac{2x}{2x^2-1}$.

3*. 解：平面束方程为

$$(2x+y-3z+2)+\lambda(5x+5y-4z+13)=0,$$

代入点(4，−3,1)，得λ=−1，回代得过已知点的平面为

$$3x+4y-z+1=0.$$

将平面束改写为 $(2+5\lambda)x+(1+5\lambda)y-(3+4\lambda)z+(2+3\lambda)=0$,

记 $n_1=(3,4,-1)$, $n_2=(2+5\lambda, 1+5\lambda, -(3+4\lambda))$,

令 $n_1\cdot n_2=0$，得$\lambda=-\dfrac{1}{3}$，回代得另一平面为

$$x-2y-5z+3=0,$$

其中λ为待定常数. 该平面与 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0.$$

由此得λ=−1，得平面方程为 $2y-2z-2=0$，即 $y-z-1=0$.

五、证明：设$\varphi(x)=xf(x)$，则$\varphi(x)$在[0,3]上连续，在(0,3)内可导，由已知条件得

$\varphi(3)=3f(3)=\int_0^1 xf(x)dx$，

由积分中值定理，必有$\eta\in[0,1]$，(或$\eta\in(0,1)$)，使$\int_0^1 xf(x)dx=\eta f(\eta)$，

即存在$\eta\in[0,1]$,使$\varphi(\eta)=\int_0^1 xf(x)dx$，于是$\varphi(\eta)=\varphi(3)$，所以$\varphi(x)$在[0,3]上满足 *Rolle* 定理条件，所以有$\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使$\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi},\quad \xi\in(0,3)\,.$$

注：对$\varphi(x)$在[η,3]使用拉格朗日定理也可得到$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2006.1.

一、选择题（本大题 24 分，共有 6 小题，每小题 4 分）

1．下列结论中，正确的是（　　）

（A）有界数列必收敛；　（B）单调数列必收敛；

（C）收敛数列必有界；　（D）收敛数列必单调.

2.设函数 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义,对于下面三条性质:

① $f(x)$ 在 x_0 点连续;② $f(x)$ 在 x_0 点可导;③ $f(x)$ 在 x_0 点可微.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示由性质 P 推出性质 Q，则应有[　　].

(A)②⇒③⇒①;　(B) ②⇒①⇒③;

(C)③⇒①⇒②;　(D) ①⇒②⇒③.

3. 曲线 $y=\dfrac{x}{3-x}$（　　）.

（A）既有水平渐近线，又有垂直渐近线；　（B）仅有水平渐近线；

（C）仅有垂直渐近线；　（D）无任何渐近线.

4．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，则 $f(x)=\int_a^b f(x)dx$ 存在的必要条件是（　　）

（A）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导；　（B）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导连续；

（C）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；　（D）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调.

5．$y=y(x)$ 是微分方程 $y''+3y=e^{2x}$ 的解，且 $y'(x_0)=0$．则必有（　　）

（A）$y(x)$ 在 x_0 某邻域内单调增加；　（B）$y(x)$ 在 x_0 某邻域内单调减少；

（C）$y(x)$ 在 x_0 取极大值；　（D）$y(x)$ 在 x_0 取极小值.

6．若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数是（　　）.

（A）$1+\sin x$；　（B）$1-\sin x$；　（C）$1-\cos x$；　（D）$1+\cos x$.

二、填空题（本题 36 分，每小题 4 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=$__________.

2．$f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 的可去间断点是 $x=$ ____________ .

3．$y=\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $dy=$____________ .

4．$\int_0^1 xe^x dx$ 的值是 ______________ .

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}=$________________ .

6．$x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x}\sin^2 x\sim x^\alpha$，则 $\alpha=$____________ .

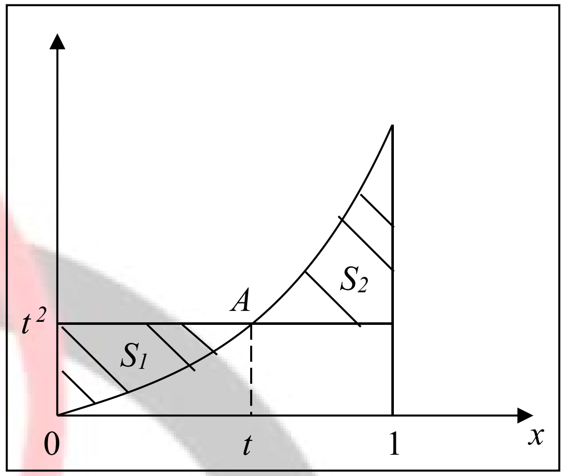
7．$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+2)(x+3)}=$__________________ .

8．设 $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_________________________ .

9．微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=-4$ 满足条件 $y(1)=1$ 的特解是 y ＝ _____________ .

三、（8 分）计算不定积分 $\int\dfrac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$.

四、（8 分）求曲线 $y=x^3-6x^2+12x+4$ 的升降区间，凹凸区间及拐点.



五、（8 分）求微分方程 $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$ 的通解.

六、（10 分）在 $[0,1]$ 上给定函数 $y=x^2$，问 t 为何值时，如图所示阴影部分的面积 S_1 与 S_2 的和最小？并求此时两图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

七、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且不恒为常数. 又 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，且 $f(a)=f(b)$.

试证：$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)>0$.

2006. 1. 10

一、单项选择题(本大题分 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1．(C)　2.(A)　3.(A)　4 .(C).　5.(D)　6. (B)

二、填空题（本大题分 9 小题, 每小题 4 分, 共 36 分）

1.e^2　2.$x=0$　3.$dy=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$　4.1　5.$\dfrac{1}{3}$　6.$\alpha=\dfrac{5}{2}$

7.$\ln\dfrac{3}{2}$　8.$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1-t)}$　9.$y=x(1-4\ln x)$　9*.$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$

三、(8 分)计算不定积分$\displaystyle\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$.

解：$\displaystyle\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^2+1)\arctan x-\arctan x}{1+x^2}dx$------------2 分

$\displaystyle=\int\arctan xdx-\int\arctan xd\arctan x$　------------4 分

$\displaystyle=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$------------6 分

$\displaystyle=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$-----------8 分

四、(8 分)求曲线$y=x^3-6x^2+12x+4$的升降区间, 凹凸区间及拐点.

解：$y'=3x^2-12x+12$,令 $y'=0$，得 $x=2$.

$x\neq 2$, $y'>0$ 故在$(-\infty,+\infty)$内为上升曲线.　-----------2 分

$y''=6(x-2)$.令 $y''=0$，得. $x=2$.　- -----------4 分

因为当$x<2$时, $y''<0$; 当$x>2$时, $y''>0$,　-----------6 分

所以凸区间为$(-\infty,2]$，凹区间为$[2,+\infty)$，拐点为$(2,12)$.-----------8 分

五、(8 分)求微分方程$y''+3y'+2y=3xe^{-x}$的通解.

解：微分方程的特征方程为

$r^2+3r+2=0$,

特征根为 $r_1=-1$, $r_2=-2$,　------------2 分

齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.　-----------4 分

因为 $f(x)=3xe^{-x}$, $\lambda=-1$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为 $y^*=x(Ax+B)e^{-x}$,　-----------6 分

代入原方程并整理得

$2Ax+(2A+B)=3x$,

比较系数得$A=\dfrac{3}{2}$, $B=-3$, 从而 $y^*=e^{-x}(\dfrac{3}{2}x^2-3x)$.

因此, 原方程的通解为

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\dfrac{3}{2}x^2-3x)$. -----------8 分

五*、(8 分)求直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线的方程.

解: 设过直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$的平面束的方程为

$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$,

即　$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$,　------------2 分

其中λ为待定的常数. 这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$(1+\lambda)\cdot1+(1-\lambda)\cdot1+(-1+\lambda)\cdot1=0$,

即 $\lambda=-1$. -----------4 分

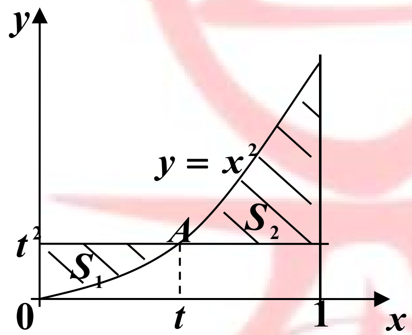
将 $\lambda=-1$ 代入平面束方程得投影平面的方程为 $2y-2z-2=0$,

即 $y-z-1=0$. ------------6 分

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$ -----------8 分

六、(10 分)在[0, 1]上给定函数 $y=x^2$，问 t 为何值时,如图所示阴影部分的面积 S_1 与 S_2 的和最小，何时最大？并求此时两图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.



解：点的坐标为 (t,t^2) 故

$$S_1=t\cdot t^2-\int_0^t x^2dx=\frac{2}{3}t^3$$

$$S_2=\int_t^1 x^2dx-(1-t)t^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^3-t^2$$

$$S=S_1+S_2=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$ ----------3 分

$S'(t)=2t(2t-1)$ 令 $S'(t)=0$ 得 $t=0,t=\frac{1}{2}$ ---------6 分

比较 $s(0)=\frac{1}{3}$，$s(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$s(1)=\frac{2}{3}$

可知，$,t=\frac{1}{2},S(t)$ 最小 ---------8 分

此时，所求体积为

$$V=\pi(\frac{1}{4})^2\cdot\frac{1}{2}-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^4dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^1x^4dx-\pi(\frac{1}{4})^2\cdot\frac{1}{2}$$

$=\frac{3}{16}\pi$ -----------10 分

七、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且不恒为常数. 又 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，且 $f(a)=f(b)$.

试证: $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)>0$.

证明：因为 $f(a)=f(b)$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数。必有 $c\in(a,b)$，使 $f(c)\neq f(a)$，不妨假设 $f(c)>f(a)$，于是在 $[a,c]\subset[a,b]$ 上使用 *lagrange* 中值定理，$\exists\xi\in(a,c)\subset(a,b)$ 使

$f(c)-f(a)=f'(\xi)(c-a)$ --------2 分

从而 $f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$ ---------4 分

若 $f(c)<f(b)$ 则

$$f(b)-f(c)=f'(\xi_0)(b-c)$$

$f'(\xi_0)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$ ---------6 分

(C) $\gamma > \beta > \alpha$； (D) $\beta > \alpha > \gamma$.

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2007.1.10

一．单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分）

1、设数列$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，则必有[ ]成立.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$存在；(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}$存在；(C) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$不存在；(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$存在．.

2．$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0, \\ 2, & x=0, \\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的[ ].

(A)可去间断点； (B)跳跃间断点； (C)无穷间断点； (D)连续点.

3．设x在点x_0处有增量Δx，函数$y=f(x)$在x_0处有增量Δy．又$f'(x_0)\neq 0$，

则当$\Delta x\to 0$时，Δy是该点微分dy的[ ].

(A)高阶无穷小； (B)等价无穷小；

(C)低阶无穷小； (D) 同阶但不是等价无穷小.

4、设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导且为奇函数，又在$(0,+\infty)$上$f'(x)>0, f''(x)>0,$

则在$(-\infty,0)$上必有[ ].

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$ ； (B) $f'(x)>0, f''(x)>0$ ；

(C) $f'(x)<0, f''(x)>0$ ； (D) $f'(x)>0, f''(x)<0$.

5、设$\alpha=\int_0^1\sqrt{x}dx$，$\beta=\int_0^1 x^2 dx$，$\gamma=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$，则有关系式[ ]成立.

(A) $\gamma>\alpha>\beta$； (B) $\alpha>\gamma>\beta$；

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共计 24 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{2x}}=$______.

2．方程$x^5-5x-1=0$在(1,2)内共有______个根.

3．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^7+1)\sin^2 x dx=$_____ .

4．$\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx==$_________________.

5．球体半径的增长率为$0.02 m/s$，当半径为$2m$时，球体体积的增长率为________m^3/s.

6．微分方程$y''+2y'-3y=0$的通解为$y=$_______________.

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共计 24 分）

1. 设$\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^3 \end{cases}$，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

2．求$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$.

3. 求$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

4. 求微分方程$(x-y)ydx-x^2dy=0$的通解.

四.（10 分）设$y=xe^{-x}(0\le x<+\infty)$求函数的极大值，函数曲线的拐点．并求曲线与直线$x=0, x=1, y=0$所围成曲边梯形的面积及此平面图形绕$x$轴旋转所成的旋转体体积.

五.（8 分）在曲线上任一点$M(x,y)$处切线在y轴上的截距为$2xy^2$，且曲线经过点$M_0(1,2)$，求此曲线的方程.

六.（8 分）设$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$，适当选取$a,b$值，使$f(x)$成为可导函数．令$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$，并求出$\varphi(x)$的表达式.

.

七.（6 分）设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(a)=f(b)$，$f'(a)>0, f'(b)>0$, .试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使$f''(\xi)=0$.

东北大学 2006-2007 第一学期高等数学(上)

2007.1.10

一．单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分）

1． C ；2． A ；3． B；4． D；5． A．

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共计 24 分）

1． $e^{\frac{3}{2}}$ ；2． 1 ；3． $\frac{\pi}{2}$；4． $(\arctan\sqrt{x})^2+C$；5． 0.32π．

6． $C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$．(或为2)

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共计 24 分）

1． $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3$ ---2 分； $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{9t^2}{\frac{1}{t}}=9t^3$ ---4 分 ； $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=9$ ------6 分．

2． $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ ---2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}$ -------------------------4 分

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$ -----------------------6 分

3． 令 $x=2\sin t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\int\sin^2tdt=2\int(1-\cos2t)dt$ -------------------2 分

$=2(t-\sin t\cos t)+C$ ----------------------------4 分

$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$ -----------------6 分

4． 原方程化为齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}$ -------------------2 分

令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=xu,\ \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

齐次方程化为 $-\frac{dy}{u^2}=\frac{dx}{x}$ -------------------------4 分

积分得 $\frac{1}{u}=\ln x-\ln C$

回代 $u=\frac{y}{x}$,得 $x=Ce^{\frac{x}{y}}$ -------------------------6 分

4． 将直线化为参数式

$$\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\\z=4+2t\end{cases}$$ -----------------------2 分

代入平面方程 $2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$

得 $t=-1$ -------------------4 分

代入参数方程得 $x=1,y=2,z=2$

故交点为 $(1,2,2)$ ---------------------6 分

四．（10 分）(1)求函数的极大值与曲线的拐点

$y'=(1-x)e^{-x}$， $y''=(x-2)e^{-x}$，

令$y'=0,x=1;$令$y''=0,x=2$ ----------------------3 分

$y''(1)=-\frac{1}{e}<0$　极大值点为 $x_1=1$; 极大值为 $y_1=y(1)=\frac{1}{e}$.

当 $0<x<2$时, $y''<0$;当 $x>2$时, $y''>0$

$(2,\frac{2}{e^2})$ 为曲线的拐点，即 $x_2=2; y_2=\frac{2}{e^2}$。----------------6 分

(2)曲边梯形面积

$$A=\int_1^2 xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_1^2=\frac{2}{e}-\frac{3}{e^2}$$ --------------8 分

(3)旋转体体积

$$V=\pi\int_1^2(xe^{-x})^2dx=\pi\int_1^2 x^2e^{-2x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(-2x^2-2x-1)e^{-2x}\right]_1^2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{e^2}-\frac{13}{e^4}\right).$$ --------------10 分

五．（8 分）过 $M(x,y)$ 的切线方程为　$Y-y=y'(X-x)$

令 $X=0$, 得 $Y=y-xy'$。

由题设得微分方程　$\begin{cases} y-xy'=2xy^2 \\ y(1)=2 \end{cases}$ ----------------4 分

令 $z=y^{-1}$, 得　$\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=2$

通解为 $z=\frac{1}{x}(x^2+C)$ ，即 $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}(x^2+C)$ ----------------6 分

代入 $y(1)=2$，得　$C=-\frac{1}{2}$

所求曲线方程为　$y=\frac{2x}{2x^2-1}$ ----------------8 分

五．（8 分）把直线方程改写为 $\begin{cases} 2x-5y-9=0 \\ 2y-z+4=0 \end{cases}$

过此直线的平面束方程为

$$2x-5y-9+\lambda(2y-z+4)=0$$ ----------------4 分

其法向量为　$(2,2\lambda-5,-\lambda)$

由 $(2,2\lambda-5,-\lambda)\bullet(1,4,-3)=0$　得 $\lambda=\frac{18}{11}$ ----------------6 分

$$2x-5y-9+\frac{18}{11}(2y-z+4)=0$$

即　$22x-19y-18z-27=0$ ----------------8 分

六．（8 分） $f(x)$在$x=1$处可导，必连续。

由　$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1=f(1)$

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$

可得　$a+b=1$ ----------------3 分

由　$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$， $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{ax+b-1}{x-1}=a$

则有　$a=2$，$b=-1$. ----------------5 分

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$$

当 $x \le 1$ 时， $\varphi(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

当 $x > 1$ 时，

$\varphi(x) = \int_0^x x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^x (2x-1)dx = x^2 - x + \frac{1}{3}$-----------------8 分

七.（6 分）由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)$.

由 *Rolle* 定理，$\exists \eta \in (a,b)$，使 $f'(\eta)=0$. -----------------2 分

对于$f'(x)$在$[a,\eta]$和$[\eta,b]$应用*Lagrange*中值定理，$\exists \xi_1 \in (a,\eta), \exists \xi_2 \in (\eta,b)$ 使

$f''(\xi_1) = \frac{f'(\eta)-f'(a)}{\eta - a} < 0, f''(\xi_2) = \frac{f'(b)-f'(\eta)}{b-\eta} > 0,$--------------4 分

又$f''(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，$f''(\xi_1)f''(\xi_2)<0$,由零点定理

$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$使$f''(\xi)=0$ -----------------6 分

2008.1.10

一．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1．数列 $f(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n} & n为奇数\\ \dfrac{1}{n} & n为偶数\end{cases}$，当 $n\to\infty$ 时，$f(n)$ 是 [　　].

(A) 无穷大；(B) 无界但非无穷大；(C) 无穷小； (D) 有界但非无穷小．

2．设 $y=\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$，则 $y^{(n)}=$ 　[　　].

(A) $2^n\cos[2x+\dfrac{2n+1}{4}\pi]$； (B) $2^n\cos[2x+\dfrac{n\pi}{4}]$；

(C) $\cos[2x+\dfrac{n\pi}{2}]$； (D) $\cos[2x+\dfrac{2n+1}{4}\pi]$．

3．设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 为 [　　].

(A) 正常数； (B) 负常数； (C) 恒为零 (D) 不为常数．

4．设 $y=y(x)$ 是方程 $y''+3y'=e^{2x}$ 的解，且 $y'(x_0)=0$，则 $y(x)$ 在 [　　].

(A) x_0 的某个邻域内单调增加； (B) x_0 的某个邻域内单调减少；

(C) x_0 处取极小值； (D) x_0 处取极大值．

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1. $y^3-e^{2x}+\sin(xy)=0$ 在 $x=0$ 处的切线方程是____________________.

2. 一个圆锥形容器，深度为 10m，上面的顶圆半径为 4m，则灌入水时水的体积 V 对水面高度 h 的变化率为____________________.

3．曲线 $y=x^3-6x^2+12x+4$ 的拐点为______________.

4．满足微分方程初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+y^2)e^x\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$ 的解为 $y=$_____________.

三、（7 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1;\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x\le 2.\end{cases}$ 试研究函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是否满足拉格朗日中值定理的条件.

四、计算下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共计 36 分）.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 设 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$， 计算 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

4. 计算积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$

5. 计算积分$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$

6. 求微分方程$y''+4y=x\cos x$的通解.

五、(7 分)由曲线$y=0$，$x=8$，$y=x^2$围成曲边三角形OAB，其中A为$y=0$与$x=8$的交点，B为$y=x^2$与$x=8$的交点．在曲边$\boldsymbol{OB}$上求一点，过此点作$y=x^2$的切线，使该切线与直线段$\overline{OA}$，$\overline{AB}$所围成的三角形面积为最大

六、（7 分）求心形线$r=a(1+\cos\theta)$与圆$r=3a\cos\theta$所围图形公共部分的面积.

七、（7 分）设当$x>-1$时，可微函数$f(x)$满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0，\qquad f(0)=1.$$

1. 求$f'(x)$；

2. 证明：当$x\geq 0$时，$f(x)\geq e^{-x}$.

八、（4 分）设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f''(x)>0$，证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq(b-a)f(\frac{a+b}{2})$.

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2008.1.18

一．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1. B.　2. A.　3. A.　4.C.

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 4 分，共计 16 分）

1. $y=\frac{1}{3}x+1$.　2. $\frac{4}{25}\pi h^2$.　3. (2,12).　4. $y=\tan(e^x+\frac{\pi}{4}-1)$.

三、(7 分）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1;\\ \frac{1}{x}, & 1<x\le 2.\end{cases}$ 试研究函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 2]$ 上是否满足拉格朗日中值定理的条件.

解　$f(x)$ 在区间 $[0,1)$ 和 $(1,2]$ 内连续且可导.

$x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)$

因此，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=-1,\quad f'_-(1)=-1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1,\ f'_+(1)=-1=f'_-(1)$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

因此，$f(x)$ 在 $[0,\ 2]$ 上满足拉格朗郎日中值定理的条件.

四、计算下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共计 36 分）.

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\sin x}{2x}$

$=2$

2. 解　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{x}\right]$

$=\exp\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x-x}{x^2}\right)$

$=\exp\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}$

$=\exp\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{2}=1$

3. 设 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$，计算 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}=\frac{t}{1+t^2}$，　$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$

则　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{1}{t})}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

4. 计算积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$

5. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

解 设 $x=\sin t$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$， $dx=\cos tdt$，

且 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$； $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$。于是

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 tdt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1)dt$$

$$= (-\cot^2 t - t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

6. 求微分方程 $y''+4y=x\cos x$ 的通解.

解 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+4=0$， 其根 $r_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$

齐次方程的通解 $y_h = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

$\pm\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，则设非齐次的特解

$y_p = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$

$y'_p = -(ax+b-c)\sin x + (cx+d+a)\cos x$

$y''_p = -2a\sin x - (ax+b)\cos x + 2c\cos x - (cx+d)\sin x$

$= -ax\cos x - (b-2c)\cos x - cx\sin x - (2a+d)\sin x$

代入原方程，整理得

$3ax\cos x + (3b+2c)\cos x + 3cx\sin x + (3d-2a)\sin x = x\cos x$

比较两端同类项系数得

$\begin{cases} 3a=1 \\ 3b+2c=0 \\ 3c=0 \\ 3d-2a=0 \end{cases}$，解得 $a=\frac{1}{3},\ b=0,\ c=0,\ d=\frac{2}{9}$

$y_p = \frac{1}{3}x\cos x + \frac{2}{9}\sin x$

通解 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}x\cos x + \frac{2}{9}\sin x$

五、解 设 $P(x,x^2)$ 是曲边 $\boldsymbol{OB}$ 上任一点。过该点的切线方程为 $Y-x^2=2x(X-x)$

令 $Y=0$ 得切线与 $\overline{OA}$ 的交点 C 的坐标 $(\frac{x}{2},0)$；

令 $X=8$ 得切线与 $\overline{AB}$ 的交点 D 的坐标 $(8,16x-x^2)$。

所围成的三角形面积

$S(x) = \frac{1}{2}(8-\frac{x}{2})(16x-x^2) = \frac{1}{4}x(16-x)^2$ （$0\le x\le 8$）

$S'(x) = \frac{1}{4}(16-3x)(16-x)$

令 $S'(x)=0$，得 $x=\frac{16}{3}$

$0<x<\frac{16}{3}$ 时， $S'(x)>0$； $\frac{16}{3}<x<8$ 时， $S'(x)<0$。

因此， $x=\frac{16}{3}$ 时， $S(x)$ 取极大值，也是最大值。

所求点为 $(\frac{16}{3},\frac{256}{9})$。

六、求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $r=3a\cos\theta$ 所围成公共部分图形的面积。

解 由于图形关于极轴对称，故所求图形的面积就是极轴上方图形的面积 A_1 的二倍。

解方程 $\begin{cases} r=a(1+\cos\theta) \\ r=3a\cos\theta \end{cases}$ 得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

所求的面积

$$A=2A_1=2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}a^2\left(1+\cos\theta\right)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}9a^2\cos^2\theta d\theta]$$

$$=a^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta+\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta\right\}$$

$$=a^2\left\{\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$=\frac{5}{4}\pi a^2.$$

七、　解 1. 所给等式变形为

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$$

上式两端对 x 求导，得

$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x)$$

令 $u=f'(x)$，则 $\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{x+2}{x+1}u$，解之得，$u=\dfrac{Ce^{-x}}{1+x}$

即 $f'(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{1+x}$

由 $f(0)=1$ 及 $f(0)+f'(0)=0$，知 $f'(0)=-1$，从而 $C=-1$，因此 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}$。

2 设 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$，则 $\varphi(0)=0$.

$\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{xe^{-x}}{1+x}$，当 $x\ge 0$ 时，$\varphi'(x)\ge 0$，

即 $\varphi(x)$ 单调增加，因此

$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$　即有 $f(x)\ge e^{-x}$。

八、证明 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处的一阶 Taylor 公式为

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

（ξ 在 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间）　(1)

因 $f''(x)>0$，所以 $f(x)>f(\dfrac{a+b}{2})+f'(\dfrac{a+b}{2})(x-\dfrac{a+b}{2})$

(1)式两边在[a,b]上积分得，

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b\left[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})\right]dx$$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a).$$

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2009.1.16

一．单项选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．$f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ 是函数 $y=f(x)$在 $x_0=x_0$ 处取得极小值的一个[　　].

(A) 必要充分条件；(B) 充分条件非必要条件；(C) 必要条件非充分条件； (D) 既非必要条件也非充分条件.

2．设 C 为任意常数，且 $F'(x)=f(x)$, 则[　　].

(A) $\int f(x)dx=F(x)+C$；　**(B)** $\int F'(x)dx=f(x)+C$；

(C) $\int F(x)dx=f'(x)+C$；　**(D)** $\int f'(x)dx=F(x)+C$.

3．设 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n =[　].

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4.

4．设函数 $f(x)$在区间(a, b)内可导，x_1 , x_2 是(a, b)内任意两点，且 $x_1<x_2$, 则至少存在一点ξ使的下列等式成立的是 [　　].

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \xi\in(a, b)$；　(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1), \xi\in(x_1, b)$；

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \xi\in(x_1, x_2)$；　(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a), \xi\in(a, x_2)$.

5．设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a, b 满足 [　　]

(A)$a<0, b<0$；　(B) $a>0, b>0$；　(C) $a\le 0, b>0$；　(D) $a\ge 0, b<0$.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共计 1 5 分）

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} & x\ne 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ____________________.

2. 设函数 $f(x)$可导，$y=f(\sin^2 x)$，则 $dy=$____________________.

3．函数 $f(x)=e^x$ 的 3 阶麦克劳林公式为____________.

4．质点以速度 $t\sin t^2$(米/秒)做直线运动，则从时刻 $t_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (秒)到 $t_2=\sqrt{\pi}$ (秒)内质点所经过的路程等于______(米).

5．以 $y_1=\cos 2x$, 　$y_2=\sin 2x$ 为特解的常系数齐次线性微分方程为________.

三、(8 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ x\sin x & x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

四、计算下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共计 36 分）.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$.

2. $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

3. 设函数 $y=y(x)$由 $y=1+xe^y$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设函数 $f(x)$连续，且 $\int_0^{x^3-1}f(x)dx=x$，求 $f(7)$.

5. $y''+4y=x\cos x$ 的通解.

五、(8 分)求解微分方程的初值问题：$\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y(0)=1, y'(0)=3\end{cases}$.

六、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x\ge 0 \\ 1+x, & x<0\end{cases}$，计算 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

七、（8 分）在抛物线 $y=-x^2+1(x>0)$上求一点 P，过 P 点作抛物线的切线，使此切线与抛物线及两坐标轴所围成的面积最小.

八、(8 分)设函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=1, x=t\ (t>1)$与 x 轴所围成平面图形绕 x 轴旋转一周形成旋转体的体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]，$$

又已知 $f(2)=\dfrac{2}{9}$，求 $f(x)$.

九、（6 分）设函数 $y=f(x)$ 在$(-1,1)$内具有二阶连续导数且 $f''(x)\ne 0$，

(1)证明对于$(-1,1)$内任一 $x\ne 0$，存在惟一的$\theta(x)\in(0,1)$,使

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)\cdot x]$$

成立；

(2)求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.

一、1. B.　　2. A.　　3. B.　　4.C.　　5. D

二、1. $a=e^{-\frac{1}{2}}$.

2. $dy=\sin 2xf'(\sin^3 x)dx$.

3. $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.

4. $\frac{1}{2}$.

5. $y''+4y=0$.

三、$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x>0 \\ \sin x+x\cos x, & x<0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

四、1. 1 .

2. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$,

3. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$,

4. $f(7)=\frac{1}{12}$

五. $y=x^3+3x+1$.

六. $\frac{3}{2}-2e^{-1}$ 。

七. $P(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$

八. $y=\frac{x}{1+x^3}$

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2010. 1

一、单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分）

1． $x=0$是函数$f(x)=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$的（　　）间断点.， **[　　].**

(A) 可去；(B) 跳跃；(C) 振荡； (D) 无穷.

2．若 $f(x)=2^x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]}{n^2}=($　　$)$　[　　].

(A) $\ln 2$；　(B) $\dfrac{\ln 2}{2}$；(C) 1；　(D) $\dfrac{e}{2}$

3．函数 $f(x)=\int_{x-\pi}^{x+\pi}e^{\sin t}\cos t dt$，则 $f(x)=$ [　　].

(A) 正常数；　(B) 负常数；　(C) 恒为零；　(D) 非常数.

4． 设 y_1, y_2 是二阶线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解，那么 $y=C_1y_1+C_2y_2(C_1,C_2,$是任意常数)是该方程通解的充分必要条件是 [　　].

(A) $y_1'y_2+y_1y_2'=0$； (B) $y_1'y_2+y_1y_2'\neq 0$；
(C) $y_1'y_2-y_1y_2'=0$； (D) $y_1'y_2-y_1y_2'\neq 0$.

5.若 $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且 $f(x)>0$，能使不等式

$\boldsymbol{f(b)(b-a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}}$成立的是[　　].

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$； (B) $f'(x)>0, f''(x)>0$；
(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$； (D) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共计 24 分）

1. 若函数 $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}}$**在$x=0$处连续，则$a=$** ____________ 。

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内的极小值为____________ 、

3．函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$是可导的偶函数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3-x)-f(3)}{2x}=1$，则 $y=f(x)$在点$(-3,f(-3))$处的切线斜率为______________.

4．若$\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{2}x^4$，则$f(1)=$______.

5．若$f(x)$在$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上连续，则$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-f(-x)]\sin^2 x dx=$______.

6．若方程 $y'+y\tan x=-2\cos 2x$ 有一个特解 $y=f(x)$，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$______.

三、计算下列各题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共计 36 分）.

1．若 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$　$(a>0)$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x^3\sin\dfrac{1}{x})$.

3. 计算不定积分 $\int(\arcsin x)^2 dx$.

4. 计算定积分$\int_0^5 \frac{x+1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$.

5. 若$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 x, \end{cases}$ ，求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

6. 如果$y=f(x)$满足$\Delta y=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且$f(1)=1$，求$f(x)$.

四、(8 分)摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $(a>0)$的第一拱$(0\le t\le 2\pi)$，求(1)该摆线的弧长(2)该摆线与x轴围成的平面图形绕x轴旋转一周所得立体的体积.

五、（8 分）若$\varphi(x)$连续，且满足方程$\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x \varphi(t)dt$，(1)写出与该方程等价的二阶微分方程初值问题；(2)求$\varphi(x)$.

六、（4 分）若$f(x)$在$[0, a]$上连续，且$\int_0^a f(x)dx=0$，证明至少存在一点$\xi\in(0, a)$，使得$f(\xi)+\int_0^{\xi} f(x)dx=0$.

一、1. 【解】应选择 A

因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$，

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$f(0-0)=f(0+0)$.

所以$x=0$是$f(x)$的可去间断点.

2. 【解】应选择 B

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln[f(1)\cdot f(2)\cdots f(n)]}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln(2\cdot 2^2\cdots 2^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}(\ln 2+\ln 2^2+\cdots+\ln 2)}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln 2^{\frac{1}{n}}+\ln 2^{\frac{2}{n}}+\cdots+\ln 2^{\frac{n}{n}})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln 2^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\ln 2^x dx=\frac{\ln 2}{2}$$

3. 【解】应选择 C

$$f(x)=\int_{x-\pi}^{x+\pi}e^{\sin t}\cos t dt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d\sin t=\left[e^{\sin t}\right]_0^{2\pi}=1-1=0$$

或

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{x-\pi}^{x+\pi}e^{\sin t}\cos t dt=e^{\sin(x+\pi)}\cos(x+\pi)-e^{\sin(x-\pi)}\cos(x-\pi)$$

$$=e^{-\sin x}(-\cos x)-e^{-\sin x}(-\cos x)=0\Rightarrow f(x)=C=f(\pi)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d\sin t=0$$

4. 【解】应选择 D

$y=C_1y_1+C_2y_2$(C_1,C_2,是任意常数）是该方程通解的充分必要条件是

y_1,y_2线性无关 $\Leftrightarrow \dfrac{y_1}{y_2}\neq C\Leftrightarrow\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)'\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{y_1'y_2-y_1y_2'}{(y_2)^2}\neq 0\Leftrightarrow y_1'y_2-y_1y_2'\neq 0$

5. 【解】应选择 D

$f(b)(b-a)$是以$(b-a)$为底，$f(b)$为高的矩形面积 .

$\int_a^b f(x)dx$是以$(b-a)$为底的曲边梯形面积

$(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$是以$f(a)$，$f(b)$分别为上底和下底，以$(b-a)$为高的梯形面积 二、

1. 【解】应填 e

$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=f(0)\Leftrightarrow a=e$

2. 【解】应填$\dfrac{\pi}{6}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\cos x$, 令$f'(x)=0$，得驻点$x=\dfrac{\pi}{3}$. $f''(x)=\sin x$, $f''(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$

$f(x)$在$x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极小值$f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{6}$

3. 【解】应填 2

$f(x)$是可导的偶函数，$f(-x)=f(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3-x)-f(3)}{2x}=1\Rightarrow 1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x-3)-f(-3)}{2x}=\frac{1}{2}f'(-3)\Rightarrow f'(-3)=2$$

或

$f(-x)=f(x)$,两边对x求导得$f'(-x)\cdot(-x)'=f'(x)$.

$-f'(-x)\cdot=f'(x).f'(x)$为奇函数　而$f'(3)\cdot=-2$，故$f'(-3)\cdot=2$

4. 【解】应填 2

$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}x^4$两端对$x$求导,得$f(x)=2x^3$

令$x=1$,有$f(1)=2$ 。

5. 【解】应填 0

令$F(x)=f(x)-f(-x)$， $F(-x)=f(-x)-f(x)=-F(x)$； $F(x)$为奇函数

所以$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-f(-x)]\sin^2 xdx=0$

6. 【解】应填-2

$$y=f(x)=e^{-\int\tan xdx}(-2\int\cos 2xe^{\int\tan xdx}dx+C)=\cos x\left[-2\int\frac{2\cos^2 x-1}{\cos x}dx+C\right]$$

$$=-4\cos x\sin x+2\cos x\ln|\sec x+\tan x|+C$$

$f(0)=0$代入上式得$C=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-4\cos x\sin x+2\cos x\ln|\sec x+\tan x|}{x}=-2$$

三、

1. 【解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$$

2 【解】

$$\lim_{x\to0}\left(x^2-x^3\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}x^3\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}}$$

$$\underline{\underline{t=\frac{1}{x}}}\lim_{x\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{t^2}{2}}{3t^2}=\frac{1}{6}$$

3. 【解法一】

$$\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-\int x\cdot2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

【解法二】设$t=\arcsin x$，$x=\sin t$

$$\int(\arcsin x)^2dx=\int t^2\cos tdt$$

$$=\int t^2 d\sin t = t^2\sin t - \int \sin t\cdot 2tdt$$

$$= t^2\sin t + 2\int td\cos t$$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\int \cos tdt$$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

4. 【解】

设$t=\sqrt{3x+1}$，则$\int_0^5 \frac{x+1}{\sqrt{3x+1}}dx = \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{\frac{1}{3}\left(t^2-1\right)+1}{t}tdt$

$$=\frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2+2\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}+2t\right)\Big|_1^4 = 6$$

5. 【解】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}\sin^3 t)'}{(\sqrt{2}\cos^3 t)'} = \frac{3\sqrt{2}\sin^2 t\cos t}{3\sqrt{2}\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3\sqrt{2}\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sec^4 t\cdot\csc t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\sqrt{2} = \frac{4}{3}$$

6. 【解法一】

$$dy = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \frac{-(2x-2)}{-2\sqrt{2x-x^2}}dx$$

$$= \frac{-d(2x-x^2)}{2\sqrt{2x-x^2}} = d(-\sqrt{2x-x^2}+C),$$

$$y = -\sqrt{2x-x^2}+C.$$

【解法二】 $y=\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx$

$$= \int \frac{\sin t}{\sqrt{1-(\sin t)^2}}d\sin t = \int \sin tdt = -\cos t + C = -\sqrt{2x-x^2}+C,$$

$f(1)=1$代入得 C=2 所以 $f(x)=2-\sqrt{2x-x^2}$.

四、【解】（1）

弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

所求弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}d\theta = 2a[-2\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8a.$$

（2）所给图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V_x = \int_0^{2\pi a}\pi y^2 dx = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$= \pi a^3\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)^3 dt = 2\pi a^3\int_0^{\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^3 dt$$

$$= 16\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\cdot 2du$$

$$= 32\pi a^3\,\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 5\pi^2 a^3.$$

五、【解】 等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)dt,$$

再求导得微分方程

$$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x),$$

即 $\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$.

又 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=1^x$

设 $y=\varphi(x)$，则等价的二阶微分方程初值问题为

$$\begin{cases} y''+y=e^x \\ y(0)=1,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

对应齐次方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

易知 $y_p=\dfrac{1}{2}e^x$ 是非齐次方程的一个特解,

故非齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x.$$

由 $y(0)=1, y'(0)=1$,得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$.

因此

$$y=\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x).$$

六、【证明】

设 $F(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)$在$[0,a]$连续，在$(0,a)$可导

$$F'(x)=-e^{-x}\int_0^x f(t)dt+e^{-x}f(x)=e^{-x}\left(f(x)-\int_0^x f(t)dt\right)$$

$$F(0)=F(a)=0$$

由 Rolle 定理至少存在一点 $\xi\in(0,a)$使 $F'(\xi)=-e^{-\xi}\left(f(\xi)-\int_0^{\xi} f(t)dt\right)=0$

即$f(\xi)-\int_0^{\xi} f(t)dt=0$.

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2011. 1

一、单项选择题（在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中. 共 5 小题，每小题 4 分，计 20 分).

1. $x=0$ 是函数 $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|}}$ 的 [ ].

(A) 可去间断点； (B) 跳跃间断点；

(C) 振荡间断点； (D) 无穷间断点.

2. 下列结论中，正确的是 [ ].

(A) 有界数列必收敛； (B) 单调数列必收敛；

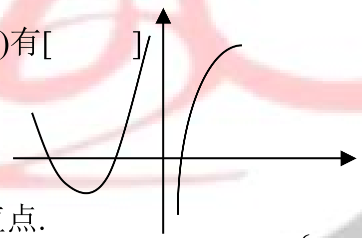
(C) 收敛数列必有界； (D) 收敛数列必单调.

3. 设 C_1 和 C_2 是任意常数，则函数 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{x}$ 满足的微分方程是[ ].

(A) $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^{x}$； (B) $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^{x}$ ；

(C) $y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^{x}$； (D) $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^{x}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数 $f'(x)$ 图形如图所示，则 $f(x)$ 有[ ]



(A) 一个极小值点和两个极大值点；

B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 三个极小值点和一个极大值点； (D) 两个极小值点和两个极大值点.

5. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0, f'(0)\neq 0, F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k= [ ].

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4.

二、填空题（将正确答案填在横线上，共 5 小题，每小题 4 分，计 20 分).

1. 设 $y=\ln x$，$y^{(n)}(1)=$______________.

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}dx=$ ______________.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+\cos x^2)xdx$ =_____________.

4. 曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}\,(x\geq 0)$ 与 x 轴，y 轴所围成的开口图形的面积为________.

5. 水坝中有一直立矩型闸门，宽为 3 米，高为 4 米.闸门的上边平行于水面，顶部与水面相齐，则闸门所受到的水压力为___________.

三、解答下列各题(共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分).

1.求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x^2}$

2. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x<0\\ \sin x, & x\geq 0\end{cases}$ 的导数.

3. $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 求 $\left\{\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

4. 确定曲线 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ 的凹凸区间与拐点.

四、求下列积分 (共 2 小题，每小题 6 分, 共 12 分).

1. $\int x^2 \cos x dx$.

2. 求 $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx$.

五、解微分方程(共 2 小题，每小题 6 分,共 12 分).

1.求解初值问题 $\begin{cases} xy''-y'=2x^3 \\ y(1)=1,\ \ y'(1)=2. \end{cases}$

2. 求 $y''-3y'+2y=\sin x$ 的通解.

六(8 分)、求单位球的内接正圆锥体的最大体积以及取得最大体积时锥体的高.

七、(4 分)　设 $f(x)$在[0, 1]上可微，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2} f(x)dx$,证明在(0, 1)内至少有一点 ξ ,使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

一、1. 【解】应选择 B;

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\sin x}{x}=1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)\sin x}{-x}=-1$$

$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。

2. 【解】应选择 C;

数列有界是数列收敛的必要条件

3. 【解】应选择 A;

对应齐次方程的通解

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

特征根 $r_1=1, r_2=-2$ 特征方程 $r^2-r-2=0$

齐次方程 $y''-y'-2y=0$

非齐次方程的特解 $y_h = xe^x$

非齐次方程 $y''-y'-2y=3xe^x$

4. 【解】应选择 D;
由函数取极值的第一充分条件可得
5. 【解】应选择 C.

$$F'(x)=\left(x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt\right)'=2x\int_0^x f(t)dt+x^2 f(x)-x^2 f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

由题设有（其中 C 为常数）

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^k}=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(k-1)x^{k-2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

故 $k=3$

二、1. 【解】应填 $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

$$y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}\cdots y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, y^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

2. 【解】应填 $\arcsin e^x + C$

$$\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\int\frac{d\,e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}=\arcsin e^x + C.$$

3. 【解】应填 $\frac{2}{3}$

$$\int_{-1}^{1}(x+\cos x^2)xdx=\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}x\cos x^2dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$$

4. 【解】应填 $\frac{\pi}{2}$

$$A=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\arctan x\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

5. 【解】应填 24g (kN)或 235.2(kN) .

$$P=\int_0^4 3gxdx=3g\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=24g(kN)$$

三、

1. 【解】 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x^2}$.

原极限$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})=\frac{3}{4}$$

2.【解】 $x>0$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{1-x}$

$x<0$ 时， $f'(x)=\cos x$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-\sin 0}{x}=1\text{，}\qquad f'_+(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)-\sin 0}{x}=-1$$

$$f'_-(0)=-1\neq f'_+(0)$$

$f'(0)$ 不存在.

所以 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

3. 【解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{t}{2})'_t}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^2+1}{4t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=\frac{1}{2}.$$

4. 【解】

$$f'(x)=(x-1)(x-2)^2\text{，}\quad f''(x)=(3x-4)(x-2)$$

令 $f''(x)=0$, 得 $x_1=\frac{4}{3}$，$x_2=2$

当 $x<\frac{4}{3}$ 时，$f''(x)>0$，曲线为凹弧，当 $\frac{4}{3}<x<2$ 时，$f''(x)<0$，曲线为凸弧，

当 $x>\frac{4}{3}$ 时，$f''(x)>0$，曲线为凹弧.

所以曲线有拐点

$(\frac{4}{3}, f(\frac{4}{3}))$，$(2, f(2))$.

$$f(\frac{4}{3})=\int_0^{\frac{4}{3}}(x-1)(x-2)^2dx=-\frac{121}{81}$$

$$f(2)=\int_0^2(x-1)(x-2)^2dx=-\frac{4}{3}$$

即拐点为 $(\frac{4}{3}, -\frac{121}{81})$ 和，$(2, -\frac{4}{3})$

四、

1. 【解】：$\int x^2\cos xdx=x^2\sin x-\int 2x\sin xdx$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-\int 2\cos xdx$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

2【解】设 $\sin x=t$，则有

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 tdt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot(1-\sin^2 t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{32}.$$

五、1.【解】：设 $y'=p$，方程化为 $p'-\frac{1}{x}p=2x^2$

这是一阶线性方程，有

$$p=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int 2x^2 e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)$$

$$=e^{\ln x}\left(\int 2x^2 e^{\ln x^{-1}}dx+C_1\right)=x\left(\int 2x^2\frac{1}{x}dx+C_1\right)$$

$$=x\left(\int 2xdx+C_1\right)=x(x^2+C_1)$$

由 $y'(1)=2$,得$C_1=1$，即 $y'=x^3+x$,所以有

$$y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C_2，由 y(1)=1,得 C_2=\frac{1}{4}$$

即所求特解为 $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}$.

2. 【解】：$r^2-3r+2=0$,得特征根为 $r_1=1,r_2=2$，

故齐次方程 $y''-3y'+2y=0$的通解是 $y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$

非齐次方程的特解为

$$y_p=A\cos x+B\sin x,$$

将其代入到原方程中，得

$$(A-3B)\cos x+(3A+B)\sin x=\sin x，得 A=\frac{3}{10},B=\frac{1}{10}$$

即

$$y_p=\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x.$$

故所求方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$$

六【解】：设球心到锥体底面垂线长为 x ,则圆锥体的高为 $1+x$，圆锥体的半径为

$\sqrt{1-x^2}$,故圆锥体体积为

$$V=\frac{\pi}{3}(\sqrt{1-x^2})^2(1+x)=\frac{\pi}{3}(1-x)(1+x)^2,(0<x<1)$$

$$V'=\frac{\pi}{3}(1+x)(1-3x),令 V'=0,得 x=\frac{1}{3},x=-1(舍去),$$

由于在$(0,1)$内，只有唯一一个驻点，且所求的最大值存在，故该驻点 $x=\frac{1}{3}$ 就是所求的最大值点. 最大值为

$$V_{\max}=V(\frac{1}{3})=\frac{32}{81}\pi,$$

此时圆锥体的高为$\frac{4}{3}$.

七、【证】.

：设 $F(x)=e^{1-x^2}f(x)$，则 $F(1)=f(1)$

因为$e^{1-x^2}f(x)$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上连续,由积分中值定理，在$[0,\frac{1}{2}]$至少有一点 η ,使

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)dx=2\cdot\frac{1}{2}e^{1-\eta^2}f(\eta)=e^{1-\eta^2}f(\eta)=F(\eta),\qquad 2 分$$

即 $F(1)=F(\eta)$，由所给条件知道 $F(x)$在上$[\eta,1]$满足 Rolle 定理条件,由 Rolle 定理，在$(\eta,1)\subset(0,1)$内至少有一点 ξ,使$F'(\xi)=0$,即

$$F(\xi)=(e^{1-x^2}f(x))'|_{x=\xi}=e^{1-\xi^2}(-2\xi)f(\xi)+e^{1-\xi^2}f'(\xi)=0.$$

移项整理后即得 $\quad f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2012.1

一、单项选择题（本题共 3 小题，每小题 4 分，共计 12 分）

1. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可微,当 $\Delta x \to 0$ 时,在任意点 x 处的 $\Delta y - dy$ 是关于 Δx 的 [　　].

(A)高阶无穷小；(B)等价无穷小；(C)同阶无穷小；(D) 低阶无穷小.

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-1}{x-1}e^{\frac{1}{|x-1|}}$ [　　].

(A) 等于 5；(B) 等于 0；(C) 为$+\infty$；(D) 不存在但不为∞.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中$a^2+c^2\neq0$,则必有 [　　].

(A) $b=4d$；(B) $b=-4d$；(C) $a=4c$；(D) $a=-4c$.

二、计算下列各题 （本题共 7 小题，每小题 7 分，共计 49 分）

1. 求星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ \end{cases}$ 在$t=\dfrac{\pi}{6}$时的切线方程.

2. 求$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$（$a>0$）.

3. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

4 .求解初值问题:$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=ky \\ y|_{t=0}=y_0\end{cases}$.

5 设$f(x)\in C[-a,a]$ $(a>0)$,证明: $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx$,

并计算$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin x}$.

6. 确定常数a和b,使得当$x\to0$时,$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$是关于x的5阶无穷小.

7. 求序列$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$的最大项.

三、(8 分)计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围平面图形绕$x$轴旋转一周而成的椭球体的体积.

四、(8 分) 函数$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,判断函数$f(x)$在$x=0$处是否可导，如不可导请给出理由;如可导,请求出一阶和二阶导数,并对$n(n\geq 3)$阶导数值给出猜测.

五、（8 分）设物体A从点$(0,1)$出发以常速度v沿y轴正向运动,物体B以常速度$2v$从点$(-1,0)$与A同时出发,方向始终指向A,建立物体B运动轨迹所满足的微分方程.

六、(5 分) 证明:对于每个正整数n，

$$\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}}<1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)<\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

七、（5 分）$f(x)$是一个系数为正的最高阶为偶数的多项式,并且对任意实数x，$f(x)-f''(x)\geq 0$. 证明:对任意实数x， $f(x)\geq 0$.

八、(5 分)对任意一个定义在$[0,1]$上的连续函数$f(x)$,定义$A(f)=\int_0^1 x^2 f(x)dx$，$B(f)=\int_0^1 x(f(x))^2 dx$. 求:当$f(x)$取遍所有连续函数时，$A(f)-B(f)$的最大值.

一 1.【解】应选择 A.

解因为函数可微，所以 $\Delta y - dy = o(\Delta x)$

2.【解】应选择 C

$\because \lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{|x-1|}} = +\infty, \therefore \lim\limits_{x\to1} \frac{x^5-1}{x-1} e^{\frac{1}{|x-1|}} = \lim\limits_{x\to1}(x^4+x^3+x^2+x+1)e^{\frac{1}{|x-1|}} = +\infty$

3.【解】应选择 D

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})} = \lim_{x\to0}\frac{a\frac{\tan x}{x}+b\frac{(1-\cos x)}{x}}{c\frac{\ln(1-2x)}{x}+d\frac{(1-e^{-x^2})}{x}} = \frac{a}{-2c} \Rightarrow a=-4c$$

二、1【解】

切点的横坐标和纵坐标分别为

$$x_0 = a\cos^3\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a \text{；和 } y_0 = a\sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{a}{8};$$

为求切线的斜率，先求 $\frac{dy}{dx}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a\sin^3 t)}{d(a\cos^t)} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t;$$

在 $t=\frac{\pi}{6}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 之值为：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

此即所求切线的斜率，因此切线方程为：

$$y-\frac{a}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{3\sqrt{3}}{8}a)$$

2.【解】

设 $x=a\tan t; -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,那么

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 t} = a\sqrt{1+\tan^2 t} = a\sec t, dx = a\sec^2 t dt$$

于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt = \int\sec t dt = \ln|\sec t+\tan t|+C$$

为了求 $\sec t$,根据 $\tan t=\frac{x}{a}$ 做辅助三角形；因为 $\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}, \tan t=\frac{x}{a}$,所以

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|\sec t+\tan t|+C = \ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C_1;$$

其中 $C_1 = C-\ln a$.

3.【解】

分母是 x^4,只须将分子中的 $\cos x$ 与 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 写成四阶 Maclaurin 公式(用 Peano 余项形式)由

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o\left(x^4\right)$$

得 $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

4. 【解】

方程变形为 $\frac{dy}{dx}-ky=0$

其解为 $y=Ce^{kx}$

由 $y\big|_{t=0}=y_0$ 得 $C=y_0$

$y=y_0e^{kx}$

5. 【解】 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$

令 $t=-x$，有

$\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{a}^{0}f(-t)(-dt)=\int_{0}^{a}f(-t)dt=\int_{0}^{a}f(-x)dx$

则

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}]dx$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{1-\sin^2 x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\cos^2 x}dx$$

$$=\left[2\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2$$

6.【解】 解 $f(x)$是有任意阶导数的，它的 5 阶麦克劳公式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)$$

$$\sin 2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o\left(x^5\right)$$

$$f(x)=x-a\sin x-\frac{1}{2}b\sin 2x$$

$$=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o\left(x^5\right)\right]$$

$$=(1-a-b)x+\frac{a+4b}{3!}x^3+\frac{-a-16b}{5!}x^5+o(x^5).$$

要使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时是关于 x 的 5 阶无穷小，就是要使极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}[\frac{1-a-b}{x^4}+\frac{a+4b}{3!x^2}+\frac{-a-16b}{5!}+\frac{o(x^5)}{x^5}]$$

存在且不为 0. 为此令

$$\begin{cases}1-a-b=0\\ a+4b=0\end{cases},$$

解之得 $a=\frac{4}{3}$，$b=-\frac{1}{3}$.

7. 【解】解 令 $f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>1)$，则

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x,$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x=\frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=e$.

因为当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以唯一驻点 $x=e$ 为最大值点.

$$2<e<3, \sqrt[3]{3}=9^{\frac{1}{6}}>8^{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}.$$

因此所求最大项为 $\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}=\sqrt[3]{3}$

三、【解】

椭球体可以看成是由上半椭圆 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (-a\le x\le a)$ 与 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得的立体.

取 x 为积分变量,则 $x\in[-a,a]$,过 $[-a,a]$ 上任一点 x ,做垂直与 x 轴的平面,截旋转体所得的截面面积 $A(x)=\pi y^2(x)$.于是

$$V=\int_{-a}^{a}A(x)dx=2\int_0^a \pi y^2dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx$$
$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

四、【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$， 所以，$f'(x)=0.$

$x\neq0$时，$f'(x)=\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^4}{e^{t^2}}=0\text{，所以，}f''(x)=0.$$

可以猜测，$f^{(n)}(x)=0.$

五、【解】

设时刻 t ,物体 B 位于 $P(x,y)$ 处, $y=y(x)$ 为轨迹方程,则 A 的位置在 $Q(0,vt+1)$,过 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

将 Q 点坐标代入,得:

$$vt+1-y=y'(0-x)$$

即

$$vt=y-1-xy'$$

又 $2vt=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}dx$,代入上式,两边再求导得:

$$2xy''+\sqrt{1+y'^2}=0$$

所求的方程为:

$$\begin{cases}2xy''+\sqrt{1+y'^2}=0\\ y(-1)=0\\ y'(-1)=1\end{cases}$$

六、【证明】 $\ln[1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)]=\ln1+\ln3+\ln5+\cdots+\ln(2n-1)$

$$=\frac{1}{2}[2\ln1+2\ln3+2\ln5+\cdots+2\ln(2n-1)]$$
$$<\int_3^{2n+1}\ln xdx=(x\ln x-x)\Big|_3^{2n+1}=(2n+1)[\ln(2n+1)-1]-3[\ln3-1]$$
$$<(2n+1)\ln\left(\frac{2n+1}{e}\right)$$

$$\frac{1}{2}[2\ln1+2\ln3+2\ln5+\cdots+2\ln(2n-1)]$$

$$>\int_1^{2n-1}\ln xdx=(x\ln x-x)\Big|_1^{2n-1}=(2n-1)[\ln(2n+1)-1]+1>(2n-1)\ln\left(\frac{2n-1}{e}\right)$$

因此， $\ln\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}}<\ln[1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)]<\ln\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$

七、【证明】反证法，设存在一点 x_0, $f(x_0)<0.$

因 $f(x)$ 是一个系数为正的最高阶为偶数的多项式，则

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$，因此，$f(x)$ 的最小值小于 0.

设 $f(x_1)$. 是 $f(x)$ 的最小值 . 因 $f(x)$ 有二阶导数，所以

$f''(x_1).\ge 0$ $f(x_1)-f''(x_1).<0$,与对任意实数 x，$f(x\ \ )-f''(x).\ge 0$ 矛盾，

因此，对任意实数 x，$f(x\ \ ).\ge 0$.

八、【证明】 $A(f)-B(f)=\int_0^1 \left[x^2 f(x)-x(f(x))^2\right]dx=\int_0^1 -x\left[(f(x))^2-xf(x)\right]dx$

$=\int_0^1 \{-x[\frac{x}{2}-f(x)]^2+\frac{x^3}{4}\}dx$

当 $[\frac{x}{2}-f(x)]^2=0$, 即 $f(x)=\frac{x}{2}$ 时，$\int_0^1 \{-x[\frac{x}{2}-f(x)]^2+\frac{x^3}{4}\}dx$ 取得最大值，

即 $A(f)-B(f)$ 取得最大值，最大值 M=$\int_0^1 \frac{x^3}{4}dx=\frac{1}{16}$.

东北大学高等数学(上)期末考试试卷（无答案）

2013.01.08

一、单项选择题

1．当 $x\to 0$ 时，下列 4 个无穷小中比其它 3 个更高阶的无穷小是[　　]

(A) $\ln(1+x)$；(B) e^x-1；(C) $\tan x-\sin x$；(D) $1-\cos x$。

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3} & x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$在 $x=1$ 处[　　]

(A)左、右导数都存在；　(B) 左导数存在，但右导数不存在；

(C) 右导数存在，但左导数不存在；　(D) 左、右导数都存在。

3．设 C 为任意实数，$F'(x)=f(x)$, 则下列各式中正确的是[　　]

(A) $\int F'(x)dx=f(x)+C$；　(B) $\int f(x)dx=F(x)+C$；

(C) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)+C$；(D) $\int f'(x)dx=F(x)+C$。

4．方程 $e^x+e^{-x}=4+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内[　　]

(A)无实根；(B)有且仅有一个实根；(C) 有且仅有两个实根；(D) 有无穷多个实根。

5．微分方程 $y''+y=\sin x$ 的一个特解的形式为[　　]

(A) $Ax\sin x$；(B) $A\cos x+B\sin x$；(C) $Ax\cos x+B\sin x$；(D) $Ax\cos x+Bx\sin x$。

二、填空题

1．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x+x\sin\dfrac{1}{x} & x\ne 0\\ b & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 b=

2．曲线 $y=\ln x$ 在点____________处的切线平行于 $y=2x-3$.

3．已知 $F(x)$是 $\sin x^2$ 的一个原函数，则 $d(F(x^2))=$

4．微分方程 $y''-10y'+25y=0$ 的通解是　　　。

5．设 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f''(0)=$　　。

三、计算题

1．求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$。

2．设 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

3．已知方程 $x-\int_1^{y+x}e^{t^2}dt=\int_0^{x^2+x}\cos t dt$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

四、计算积分

1．求 $\int x\cos^2 x dx$。

2．求 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$。

五、求曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线。

六、一密度为 2.5×10^3（单位：kg/m³），底半径为 r(单位：m)，高为 h(单位：m)的金属圆柱体放入水中，上底面与水面相切，求将这个圆柱体捞出水面所做的功。

七、设函数 $f(x)$满足方程 $xf'(x)-3f(x)=-6x^2$，且由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小，试求 D 的面积。

八、设函数 $f(x)$在[0, 1]上非负连续，证明：

(1)存在 $x_0\in(0,1)$，使在$[0,x_0]$上以 $f(x_0)$为高的矩形面积 S_1 等于在$[x_0,1]$上以 $y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积 S_2。

(2)若函数 $f(x)$在(0, 1)内可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，则(1)中的 x_0 是唯一的。

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2014.01.13

一 **单项选择题**（每小题 4 分，共 24 分）

1 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=e^{f(x)}$，且 $f(0)=1$，则 $f^{(n)}(0)=$（　　）.

A：$(n-1)!\cdot e^{n}$，　B：$n!\cdot e^{n}$，　C：$(n-1)!\cdot e^{n-1}$，　D：$n!\cdot e^{n-1}$.

2 对于积分 $I=\int_0^{2\pi}(2^{\sin x}-2^{-\sin x})dx$，则 I（　　）.

A：$=2\pi$　B：$=0$　C：<0　D：>0 .

3 设 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 1 \\ x^2+x-1, & x<1 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在$[0\ ,\ 2]$上满足的 Lagrange 中值定理的 ξ =（　　）.

A：$\sqrt{\frac{3}{2}}$，　B：$\frac{7}{4}$，　C：$\sqrt{\frac{3}{2}}$ 或 $\frac{7}{4}$，　D：$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ 或 $\frac{7}{4}$.

4 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\cdot\ln(1+x)}}=$（　　）.

A：$e^{\frac{1}{6}}$　B：$e^{\frac{-1}{6}}$　C：$e^{\frac{-1}{3}}$　D：$e^{\frac{1}{3}}$

5 若 $f(x)$ 连续，且 $\int_{-1}^{0}xf(x)dx>0$，$\int_0^1 xf(x)dx>0$，则（　　）.

A：当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)<0$，　B：当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)>0$，

C：$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 至少有一个零点.　D：$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 必无零点.

6 若函数 $F(x)=\int_0^x (2t-x)\cdot f(t)dt$，其中 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 二阶可导，并且 $f'(x)>0$，当 $x\in(-1,1)$ 时，则（　　）.

A：$F(x)$ 在 $x=0$ 取极大值；　B：$F(x)$ 在 $x=0$ 取极小值；

C：$F(x)$ 在 $x=0$ 不取极值，点 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=F(x)$ 的拐点；

D：$F(x)$ 在 $x=0$ 不取极值，但是点 $(0,0)$ 是曲线 $y=F(x)$ 的拐点.

二 **填空题**（每小题 4 分，共 24 分）

7 函数 $f(x)=x^3-6x^2+1$ 在 $x\in(-1,1)$ 的极大值是（　　）.

8 反常积分 $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=$（　　）.

9 曲线 $y=k(x^2-3)^2$ 在拐点处的法线经过原点，则常数 $k^2=$（　　）.

10 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt$ 位于 $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ 的弧长是（　　）.

11 若 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且 $g(x)\cdot\int_0^2 f(x)dx=10x$，

则 $\int_0^1 g(x)dx\cdot\int_0^2 f(x)dx=$（　　）.

12 若二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的三个解是：

$y_1=x(e^{-x}+e^{-2x})$，$y_2=xe^{-x}+e^{-2x}$，$y_3=xe^{-x}+(x+1)e^{-2x}$，

则 $p^2-4q=$（　　）.

三 **解答下列各题，应有必要的步骤或说明**（共 52 分）

13 （8 分）求 $f(x)=\frac{x^2-1}{\sin(\pi\cdot x)}$ 的间断点，并指出其类型.

14 （8分）若 $f(x)$ 非负连续，且 $f(x)\cdot\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x$，求 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值.

15 （8分） 确定 a,b,ξ 的值，使得 $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+2x$ 在 $x=-2$ 处取极值，在 $x=\xi$（$\xi\neq-2$）处使 $f'(\xi)=0$，但 $f(\xi)$ 不是极值.

16 （8分）求解二阶初值问题：$\begin{cases} y''+4y=\frac{1}{2}(x+\cos 2x) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

17 （8分）设 $f(x)=\begin{cases} \int_x^1 e^{-t^2}dt & ,x\geq 0 \\ e^{-1} & , \quad x<0 \end{cases}$，

计算 $\int_{-2}^{0}(x+1)^2 f(x+1)dx$.

18 （8分）求在上半平面由曲线 $x=\sqrt{y}$，$y=2-x^2$ 和 $y=-x$ 所围成的平面图形，

（1） 面积，（2）围绕 y 轴旋转一周的立体体积.

19 （4分）若 $x\in[0,1]$ 时，$f''(x)>0$，证明：对任意正常数 α，$\int_0^1 f(x^\alpha)dx\geq f(\frac{1}{\alpha+1})$.

一 A B A B C D ;

二 7: 1, 8: $\frac{\pi}{2}$, 9: $\frac{1}{32}$, 10: $\ln(\sqrt{2}+1)$, 11: 5, 12: 0.

三

13 间断点是 $x=k$，（k 是整数） ,……….. 2 分

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{\pi\cdot\cos\pi x}=\frac{-2}{\pi}$, …..x=1 是第一类(可去)间断点…. 4 分,

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x}{\pi\cdot\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$, ….. x= -1 是第一类(可去)间断点…..6 分,

$\lim\limits_{x\to k(k\neq\pm1)}\frac{x^2-1}{\sin\pi x}=\infty$, ….. $x=k$ $(k\neq\pm1)$ 是第二类(无穷)间断点 ….. 8 分.

14 解 $\because \int_0^x f(x-t)dt \underline{\underline{x-t=u}} \int_0^x f(u)du \underline{\underline{记为}} F(x)$, ……… 2 分

则 $F'(x)=f(x)$, 于是

$f(x)\cdot\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x \Rightarrow\Rightarrow F'(x)\cdot F(x)=\sin^4 x$,

$\therefore dF^2(x)=2\sin^4 xdx \Rightarrow\Rightarrow F(x)=\sqrt{2\int_0^x \sin^4 xdx}$, ………4 分

$\therefore f(x)=F'(x)=\frac{\sin^4 x}{\sqrt{2\int_0^x \sin^4 t\,dt}}$ ………………………6 分

取 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\sin^4\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$…. 8 分

15 解 显然 $f'(x)=x^3+ax^2+bx+2$…………… 1 分

由题意知道 $f'(x)=(x+2)\cdot(x-\xi)^2$……. 4 分,

比较 $x^3+ax^2+bx+2\equiv(x+2)\cdot(x-\xi)^2$，则

$a=-2\xi+2,\quad b=\xi^2-4\xi,\quad \xi^2=1$,

$\begin{cases}\xi=1\\ a=0\\ b=-3\end{cases}$ ……. 6 分 ， $\begin{cases}\xi=-1\\ a=4\\ b=5\end{cases}$ …………8 分 .

16 解 特征方程 $r^2+4=0$，$r_{1,2}=\pm 2i$，

齐次方程 $y''+4y=0$ 的通解是 $y_h=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ ……… 2 分

显然非齐次方程 $y''+4y=\frac{1}{2}x$ 的特解 $y_{1p}=\frac{x}{8}$， ……. 3 分

非齐次方程 $y''+4y=\frac{1}{2}\cos 2x$ 的特解 $y_{2p}=x(a\sin 2x+b\cos 2x)$，

不难求出 $a=\frac{1}{8}, b=0$，则 $y_{2p}=\frac{x}{8}\sin 2x$ ……………. 4 分

原方程通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{x}{8}\sin 2x$ …….6 分

代入 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\\ y'=0\end{cases}$，则 $C_1=0$，$C_2=-\frac{1}{16}$，所求初值问题是

$y=\frac{-1}{16}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{x}{8}\sin 2x$, ……………………… 8 分

17 $\int_{-2}^0 (x+1)^2 f(x+1)dx$

$\underline{\underline{令x+1=t}} \int_{-1}^1 t^2 f(t)\,dt$ ……………. 2 分

$$= \int_{-1}^{0} t^2 e^{-1} dt + \int_0^1 f(t)\, d\left(\frac{t^3}{3}\right)$$ ………… 4分

$$= \frac{1}{3e} + \frac{t^3}{3} f(t)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 t^3\left(-e^{-t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{3e} + 0 - \frac{1}{6}\int_0^1 t^2 d\left(e^{-t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3e} - \frac{1}{6} t^2 e^{-t^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{6} e^{-t^2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$. ………. 8分

18 解 $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$，交点 A（1，1），

$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = -x \end{cases}$ 交点B（-1，1） …………….2 分

（1） $A = \int_{-1}^{1}(2 - x^2)dx - \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ……………….. 6分

（2） $V_y = 2\pi\int_0^1 x(2 - x^2)dx - 2\pi\int_0^1 x^3 dx = \pi$ ………8分.

（或 $V_y = \pi\int_0^1 y dy + \pi\int_1^2 (2 - y)dy = \pi$ ……. 8分）

19 **证明(法1)** 利用Taylor 定理

$$\because f(x) = f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) + f'\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + \frac{1}{2!} f''(\xi)\left(x - \frac{1}{\alpha+1}\right)^2$$

$$\ge f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) + f'\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha+1}\right)$$ ………. 2分

$$\therefore f(x^\alpha) \ge f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) + f'\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(x^\alpha - \frac{1}{\alpha+1}\right)$$ ……….. 3分

$$\int_0^1 f(x^\alpha)dx \ge \int_0^1 f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)dx + f'\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\int_0^1\left(x^\alpha - \frac{1}{\alpha+1}\right)dx = f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right).$$ ……4分

证明（法2）

$$左-右=\int_0^{\frac{1}{\alpha+1}}\left[f(x^\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\right]dx + \int_{\frac{1}{\alpha+1}}^{1}\left[f(x^\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\right]dx$$

$$= f'(\xi)\cdot\int_0^{\frac{1}{\alpha+1}}\left(x^\alpha - \frac{1}{\alpha+1}\right)dx + f'(\eta)\cdot\int_{\frac{1}{\alpha+1}}^{1}\left(x^\alpha - \frac{1}{\alpha+1}\right)dx, \quad 0 < \xi < \eta < 1,$$

$$= \frac{(\alpha+1)^\alpha - 1}{(\alpha+1)^{\alpha+2}}\cdot[f'(\eta) - f'(\xi)]$$

$$= \frac{(\alpha+1)^\alpha - 1}{(\alpha+1)^{\alpha+2}}\cdot f''(\delta)(\eta - \xi) \ge 0 .$$

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2015.01

一、计算题（本大题含 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解　原式$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=e$ ……………………………………………..5 分

2．设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1\\ b, & x=-1\\ a+\arccos x, & -1<x\le 1\end{cases}$，求 a,b，使得 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

解　$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(a+\arccos x)=a-\pi$，

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt{x^2-1}=0$.　…………………………..2 分

要使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，必须有

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)$，　…………………………..4 分

即　$a-\pi=0=b$，

因此，$a=\pi$，$b=0$　.　…………………………..5 分

3．设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $f'(0)$.

解　$f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，　…………………………..4 分

$f'(0)=1$.　…………………………..5 分

4．求由参数方程 $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$ 所确定函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3}{2}(1+t)$，　…………………………..3 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2-2t}=\dfrac{3}{4(1-t)}$.　…………………………..5 分

5．求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$　………………………….3 分

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.　………………………….5 分

6．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}}$　（$a>0$）.

解　$0<a\le 1$ 时

$1<\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}}\le\sqrt[n]{3}$，

因　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，　由夹逼准则　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}}=1$.　… …………….3 分

$a>1$ 时

$a^2<\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}}<\sqrt[n]{3a^{2n}}=a^2\sqrt[n]{3}$，

由夹逼准则　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}}=a^2$　…………………5 分

7．求积分 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

解　设 $x=2\sin t$　$(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2})$，则 $dx=2\cos t dt$，$\sqrt{4-x^2}=2\cos t$，

于是

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int 4\sin^2 tdt=2\int(1-\cos 2t)dt=2t-\sin 2t+C$$ ……………3 分

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$$. ………………5 分

8. 求积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\ln xdx+\int_{1}^{e}\ln xdx$

$$=(-x\ln x+x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}$$ ……………4 分

$$=2(1-\frac{1}{e}).$$ ………………5 分

9. 求解微分方程的初值问题 $\begin{cases}x^2y'+xy=1,\\ y\big|_{x=2}=1.\end{cases}$

解 方程变形为 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}$，

由公式，$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\ln x+C\right)$， ……………4 分

由已知，$C=2-\ln 2$，

初值问题的解为 $y=\frac{1}{x}\left(\ln x+2-\ln 2\right)$. ………………5 分

10. 求 $y''=(y')^2$ 的通解.

解 令 $y'=p$, 则 $y''=\frac{dp}{dx}$.

原方程化为 $\frac{dp}{dx}=p^2$，解得 $p=-\frac{1}{x+C_1}$，

则原方程的通解为 $y=C_2-\ln|x+C_1|$.

二、（8 分）$f(x)=(x-a)\varphi(x),\varphi(x)$在$x=a$处一阶连续可导，求$f''(a)$

解 因 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处有连续的一阶导数，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内可导，因此，在该邻域内

$$f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x),$$

$$f'(a)=\varphi(a)$$ ………………4 分

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)-\varphi(a)}{x-a},$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}+\varphi'(x)\right]=2\varphi'(a)$$. ………………8 分

三、（8 分）

由平面图形$0\le x\le a,0\le y\le x^{\frac{1}{3}}$,绕$x$轴旋转所成的旋转体体积为$V_x$
绕y轴旋转得到的体积为V_y,求a.

解 $V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$， ………………3 分

$V_y=2\pi\int_0^a x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$. ………………6 分

由已知，$\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}=10\cdot\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$，$a=7\sqrt{7}$. ………………8 分

四、（8 分）

证明 $F(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt$

$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt=2x[f(x)-f(0)]$. ………………4 分

因 a $(a>0)$ 为函数 $F(x)$ 的驻点，所以有 $F'(a)=0$，即 $f(a)=f(0)$. …….6 分

$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上满足 Rolle 定理的条件，因此，存在 $c\in(0,a)$，

使 $f'(c)=0$. ....8 分

五、(8 分)不作要求。

六、(8 分）给出近似计算 $\sin 31^\circ$ 的方法，并说明该方法能使 $\sin 31^\circ$ 的近似值精确到四位小数的理由.

解 利用 Taylor 公式，

$\sin x$ 的 n 阶 Taylor 公式

$$\sin x=\sin x_0+\cos x_0\cdot(x-x_0)-\sin x_0(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

（ξ在x与x_0之间）

取 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}, x_0=\frac{\pi}{6}$，则

$$\sin 31^\circ=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}(\frac{\pi}{180})^2+\cdots+\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}(\frac{\pi}{180})^{n+1}$$

其中 $\left|\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}(\frac{\pi}{180})^{n+1}\right|\le\frac{1}{(n+1)!}(\frac{\pi}{180})^{n+1}<\frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{40})^{n+1}$

只要 $n\ge 2$,就能使 $\sin 31^\circ$ 的近似值精确到四位小数.

七、(5 分)

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(\xi_2)-f(\xi_1)\right]=f(b)-f(a).$

解 $\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\int_a^b\frac{f(x+h)}{h}dx-\int_a^b\frac{f(x)}{h}dx$

$\int_a^b\frac{f(x+h)}{h}dx=\int_{a+h}^{b+h}\frac{f(x)}{h}dx$

$=\int_{a+h}^{a}\frac{f(x)}{h}dx+\int_a^b\frac{f(x)}{h}dx+\int_b^{b+h}\frac{f(x)}{h}dx$

$=-f(\xi_1)+\int_a^b\frac{f(x)}{h}dx+f(\xi_2)$

其中 ξ_1,ξ_2分别在a和$a+h$，b和$b+h$之间.

因此，$\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(\xi_2)-f(\xi_1)\right]=f(b)-f(a).$

八、(5 分)(此题意义不大) 这是一个通过一组数据构建函数模型并求该函数最大值的问题.

方法之一：

设由 5 月 1 日开始计算的天数为 x，5 月 1 日为第 0 天，将白天的相对时长记为 L，则有记载的三天数据对应于点(0,0)，(30，68)，(60，81). 由三点可确定抛物线，设该抛物线为

$$L(x)=ax^2+bx+c,$$

将(0,0)，(30，68)，(60，81)带入上式，解得 $a=-\frac{55}{1800}$，$b=\frac{191}{60}$，$c=0.$

$\therefore\ L(x)=-\frac{55}{1800}x^2+\frac{191}{60}x.$

解得 $x=\frac{5730}{110}\approx 52.09$.

即 6 月 22 日.夏至是一年中白天最长的一天，一般在 6 月 21 日或 6 月 22 日，模型结果符合实际情况，模型可行。

东北大学高等数学(上)期末考试试卷

2016.01

一、 **解答下列问题**(每题 6 分，共 54 分）

1.若 $f(x)=\begin{cases} x, x<1 \\ a, x\geq 1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} b, \quad x<0 \\ x+2, x\geq 0 \end{cases}$，且 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求常数 **a,b** 的值.

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)e^{x}+x+2}{(\sin x)^{3}}$.

3.计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx.$

4.若 $y=f(\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1})$, 且 $df(t)=\arctan t^{2}dt$, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

5.计算 $\displaystyle\int_{0}^{1}(\arccos x)^{2}dx.$

6.若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，而且在一个周期 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：

$f(x)=\begin{cases} 0, x\in[-\pi,0) \\ x, x\in[0,\pi) \end{cases}$, 记 $f(x)$的$Fourier$ 级数的和函数为$\sigma(x)$,

（1）求$f(x)$的一个$Fourier$系数 $\mathbf{b}_3$ **;(2)写出** $\sigma(\dfrac{26\pi}{3}),\sigma(81\pi)$的值 **.**

7.若 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1}, x\geq 0 \\ \frac{1}{e^{x}}, x<0 \end{cases}$，计算 $\displaystyle\int_{0}^{2}f(x-1)dx$

8.求函数 $f(x)=\int_0^x t e^{-t^2}dt$ 的极值和拐角横坐标

9.若方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 二阶可导，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

二、(9 分）求单位球的内接正圆锥体的最大体积.

三、（9 分）自原点 **O（0,0）**作曲线 L：y=e^x 的切线 **OA**，**A** 是切点。记曲线 **L**，

切线段 **OA** 以及 **x** 轴（负半轴）所围成的平面图形为 **G**。(1）求 G 的面积；(2）求 **G** 绕 **x** 轴旋转一周得到的旋转体的体积.

四、（9 分）求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 的和函数，并以此求常数项级 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

五、（9 分）已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，写出 $f(x)=\ln(1-x)$ 的关于 x 的幂级数，并以此计算

积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx$ 的值 .

六、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1.函数 f(x) 在 【**-1,2**】 上连续，（**-1,2**）内可导，**f(2)=0**，且 $\int_{-1}^0 x\cdot f(x)dx>0,\int_0^1\sin x\cdot f(x)dx>0$，证明存在 $\xi\in(-1,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

2.若 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

一、1.设 F(x)=f(x)+g(x),则 $F(x)=\begin{cases}x+b,x<0\\2x+2,0\le x<1\\x+2+a,x\ge 1\end{cases}$

由 $F(0^+)=F(0^-),F(1^+)=F(1^-)$ 得 $\begin{cases}b=2\\4=3+a\end{cases}$,所以 a=1,b=2

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-2)e^x+x+2}{(\sin x)^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-2)e^x+x+2}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x}{6x}=\frac{1}{6}$

3. 设 $\sqrt{x+1}=\tan^2 t(0\le t<\frac{\pi}{2})\therefore x=\tan^4 t-1\quad dx=4\tan^3 t\cdot\sec^2 tdt$

$\therefore$ 原式 $=\int\frac{\tan^2 t-1}{\tan^2 t+1}\cdot 4\tan^3 t\cdot\sec^2 tdt=4\int\tan^5 tdt-4\int\tan^3 tdt$

$\because \int\tan^n tdt=\int\tan^{n-2}t(\sec^2 t-1)dt=\int\tan^{n-2}td\tan t-\int\tan^{n-2}tdt$

$\therefore\int\tan^3tdt=\frac{\tan^2 t}{2}+\ln\cos t+C_1\quad \int\tan^5tdt=\frac{\tan^4t}{4}-\frac{\tan^2t}{2}-\ln\cos t+C_2$

$\therefore$ 原式 $=\tan^4 t-2\tan^2 t+2\ln(1+\tan^2 t)-2\tan^2 t+2\ln(1+\tan^2 t)+C_3$

$=x-4\sqrt{x+1}+4\ln(1+\sqrt{x+1})+C$

4. 令 $t=\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\therefore dt=\frac{\cos x(\sin x+1)-(\sin x-1)\cos x}{(\sin x+1)^2}dx=\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}dx$

$dy=df(t)=\arctan t^2dt=\arctan(\frac{\sin x-1}{\sin x+1})^2\cdot\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}dx\therefore\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{\pi}{2}$

设 $t=\arccos x$ 则 $x=\cos t\quad dt=-\sin tdt$

5. $\therefore$ 原式 $=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 t^2\cdot(-\sin t)dt=\cos t\cdot t^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos t\cdot 2tdt$

$=-\sin t\cdot 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin tdt=\pi+2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$

6.（1）$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 3xdx=\frac{1}{\pi}(-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9})\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{3}$

（2）该函数满足收敛定理的条件。它在=(2k+1)π ($k\in Z$)处不连续，其他地方连续。

$\therefore\sigma(81\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}\quad \sigma(\frac{26\pi}{3})=\sigma(\frac{26\pi}{3}-8\pi)=\sigma(\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}$

7. $\because f(0^+)=1,f(0^-)=1\ \therefore f(x)$在0处连续 设 t=x-1

$\therefore\int_0^2 f(x-1)dx=\int_0^2f(x-1)d(x-1)=\int_{-1}^1f(t)dt=\int_{-1}^0e^{-t}dt+\int_0^1\frac{1}{t+1}dt$

$=-e^{-t}\Big|_{-1}^0+\ln(t+1)\Big|_0^1=e-1+\ln 2$

8. $f'(x)=xe^{-x^2}\ \therefore x>0$时$f'(x)>0,x<0$时$f'(x)<0\ \therefore f(x)$在$(-\infty,0)\downarrow,(0,+\infty)\uparrow$

$\therefore f(x)$的极小值为$f(0)=0$,无极大值

$\because f''(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且

$x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$时，$f''(x)<0;x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$时，$f''(x)>0;x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$时，$f''(x)<0;$

$\therefore$拐点横坐标为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9.方程两边同时对 x 求导得 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=\frac{\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+\frac{dy}{dx})(x-y)-(x+y)(1-\frac{dy}{dx})}{(x-y)^2}=\frac{2x+\frac{2y(x+y)}{x-y}}{(x-y)^2}=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$$

二、不妨设高 $h\geq 1$,底面半径为 r，则 $r^2+(h-1)^2=1\Rightarrow r^2=2h-h^2$

$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}(2h-h^2)h=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2-h)\leq\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2-h}{3}\right)^3=\frac{32\pi}{81}$$

（等号当且仅当 $\frac{h}{2}=2-h$ ，即 $h=\frac{4}{3},r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时成立 ）故最大体积为 $\frac{32\pi}{81}$

也可用导数法。

三、易知 OA 方程为 y=ex,A(1,e)

(1)面积 $S=\int_{-\infty}^{1}e^xdx-\int_0^1 exdx=e^x\Big|_{-\infty}^{1}-\frac{ex^2}{2}\Big|_0^1=\frac{e}{2}$

(2)体积 $V=\int_{-\infty}^{0}\pi e^{2x}dx+\int_0^1\pi e^{2x}-\pi e^2x^2dx=\pi\left(\frac{e^{2x}}{2}\Big|_{-\infty}^{1}-\frac{e^2x^3}{3}\Big|_0^1\right)=\frac{\pi e^2}{6}$

四、$\because\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=1$ 且 $x=\pm1$ 时级数发散，$\therefore$ 定义域为 $(-1,1)$

易证 $\sum_{n=2}^{\infty}(n^2+n)x^n,\sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)x^n$ 在(-1,1)收敛

$$\therefore\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n+1)x^n=\sum_{n=2}^{\infty}(n^2+n)x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)x^n$$

$$=\left(\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n+1}\right)'-\lim_{n\to\infty}2\left\{\left[\frac{2x^2n}{x-1}+\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^2}\right]x^n+\frac{3x^2-x^3}{(x-1)^2}\right\}$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{x^3n}{x-1}+\frac{x^4-2x^3}{(x-1)^2}\right]x^n+\frac{2x^3-x^4}{(x-1)^2}\right\}\right)+\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^2}=\frac{-x^2(x^2-2x+3)}{(x-1)^3}$$

令 x=$-\frac{1}{2}$ 即得和为 $\frac{17}{54}$

注：若 $C_n=(an+b)q^{n-1}$ 则 $S_n=(An+B)q^n+C$ 其中 $A=\frac{a}{q-1},B=\frac{b-A}{q-1},C=-B$

五、$\because f'(x)=\frac{-1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\therefore f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$$\therefore I=-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\Big|_0^1=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}$$

六、1.由积分中值定理得 $\exists a\in(-1,0)$ 使 $af(a)=\int_{-1}^{0}xf(x)dx>0\Rightarrow f(a)<0$

$\exists b\in(0,1)$ 使 $\sin bf(b)=\int_{-1}^{0}\sin xf(x)dx>0\Rightarrow f(b)>0$

$\because f(a)\cdot f(b)<0\therefore\exists\eta\in(a,b)$ 使 $f(\eta)=0$ 又 $f(2)=0\therefore$ 由罗尔定理得

$\exists\xi\in(\eta,2)\subseteq(-1,2)$ 使 $f'(\xi)=0$

2. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx=-\frac{\sin^2x}{x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-\frac{2\sin x\cos x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d2x=\frac{\pi}{2}$

2016-2017 学期高数上期末考试题

一、解答下列各题

1、设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x) & -1<x\le 0\\ e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\end{cases}$，求 f(x)的间断点，并指出间断点的类型.

2、求 a,b 的值，使点（1，3）为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点.

3、已知两曲线 y=f(x)与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点（0,0）处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

4、求定积分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$.

5、求不定积分 $\int xe^{-2x}dx$.

6、计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$.

7、已知 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

8、判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+a}}(a>0)$ 的敛散性.

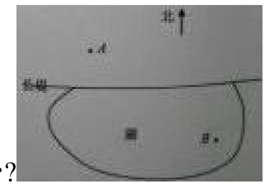
9、设函数 $y=f(x)$ 在 x=0 的某领域内具有一阶连续倒数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

二、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}$.

三、设 A>0,D 是曲线段 y=Asinx（$0\le x\le\frac{\pi}{2}$）及直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形. V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得到的旋转体的体积. 若 $V_1=V$，求 A 的值.

四、设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，其中 f(x)在 x=0 处二阶可导，求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

五、水陆混合赛中需要从 A 点到达 B 点，A,B 南北相距 5km，东西相距 7km，湖岸位于 A 点南侧 2km，是一条东西走向的笔直长堤. 比赛中运动员可自由选择路线，但必须先从 A 出发跑到长堤，再从长堤处下水游到终点 B. 已知运动员跑步速度为 $v_1=18km/h$，游泳速度为 $v_2=6km/h$. 问他应该在长堤的何处下水才能使比赛用时最少?



六、1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{\pi}{4}$，证明：方程 $(1+x^2)f'(x)=1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在点 x=0 的某邻域内有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛.