姓名 学号 班级 学院

密 封 线

东北大学考试试卷（B 闭卷）

2020—2021 学年 春 季学期

课程名称：线性代数

总分	一	二	三	四	五	六	七	八	九

一.（每题 6 分，共 18 分）

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，且 $|A|=2$，求 $\begin{vmatrix} 2a_{11}+3a_{21} & a_{11} & 3a_{31} \\ 2a_{12}+3a_{22} & a_{12} & 3a_{32} \\ 2a_{13}+3a_{23} & a_{13} & 3a_{33} \end{vmatrix}$ 的值。

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$，且 $x_1+x_4=2$，$x_2+x_3=1$，如果 $AB=BA$，求矩阵 B。

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$，求 λ 的值，使矩阵 A 的秩最小。

二.（每题 6 分，共 18 分）

1. 已知 $A=\begin{bmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & \frac{6}{7} & c \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & d \end{bmatrix}$ 为正交矩阵，求 a,b,c,d 的值。

2. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，且满足 $A^2+2A=0$，$R(A)=2$，若 $A+kE$ 是正定矩阵，求 k 的范围。

3. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维线性无关的列向量，判断 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 是否线性相关，并说明理由。

三.（每题 6 分，共 18 分）

1. 线性空间 $V=R[x]_4$，判断 V 的子集 $V_1=\{ax^3+bx^2+cx \mid a,b,c\in R\}$ 是否是 V 的子空间。

2. 设 $B=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ 是线性空间 V 的基，f 是 V 中的线性变换。如果已知 $f(\varepsilon_1-2\varepsilon_2)=3\varepsilon_1+2\varepsilon_2$，$f(3\varepsilon_1-\varepsilon_2)=-\varepsilon_1+\varepsilon_2$，求 $f(2\varepsilon_1-3\varepsilon_2)$ 在基 B 下的坐标向量。

3. 在线性空间 $R^{2\times2}$ 中，对于任意 $X\in R^{2\times2}$，定义线性变换 $T(X)=A_0X$，其中 $A_0=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。求 T 在基 $E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵。

四.（8 分）

确定常数 a，使向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，可由向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix} -2 \\ a \\ a \end{bmatrix}$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

学院________ 班级________ 学号________ 姓名________

密 封 线

五.（ 8 分）

已知 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$，其中 $A_{4j}(j=1,2,3)$ 为 D 中第 4 行第 j 列元素的代数余子式。

六.（ 8 分）

A，B 和 C 三家电信公司为某国国内 2 亿客户服务，它们分别有客户 9 千万，4 千万和 7 千万。由于广告竞争及其他原因，这三家公司每年均吸引来一些新客户，同时也失去一些老客户。每年末统计如下：A 失去 20%老客户，但吸引 10%的 B 客户和 10%的 C 客户加入该公司；B 失去 30%老客户，但吸引 10%的 A 客户和 20%的 C 客户；C 失去 30%老客户，但吸引 10%的 A 客户和 20%的 B 客户。假设该国国内客户总数不变，且这种新老客户的变化率也不变，求三年后，三家公司分别拥有多少客户（单位：千万）？

七.（ 8 分）

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解，求 a，b 的值。

八.（ 8 分）

已知 $\lambda=0$ 是 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & 1 & k \\ 4 & k & -3 \end{bmatrix}$ 的特征值，判断 A 能否对角化。

九.（ 6 分）

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=n$，证明：$A^TAx=0$ 只有零解。