学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

东 北 大 学 考 试 试 卷 （ B　闭 卷 ）

2017 — 2018 学年第　二　学期

课程名称：线性代数

总分	一	二	三	四	五	六

得分：

一.（ 5 分）给定 R^3 的两组基 $\varepsilon_1=(1,-1,1)^T$, $\varepsilon_2=(0,1,1)^T$, $\varepsilon_3=(1,0,1)^T$ 与 $\eta_1=(0,1,2)^T$, $\eta_2=(1,1,-1)^T$, $\eta_3=(2,4,0)^T$. 定义线性变换 $\mathscr{A}$：

$\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\eta_1-\eta_2+2\eta_3$，$\mathscr{A}(\varepsilon_2)=3\eta_1+\eta_2+\eta_3$，$\mathscr{A}(\varepsilon_3)=2\eta_1-3\eta_2+4\eta_3$.

求：线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 η_1，η_2，η_3 下的矩阵 .

解：$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&1&-3\\2&1&4\end{pmatrix}$,

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&1&-3\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}5&-1&4\\4&-11&-20\\0&8&18\end{pmatrix}.$$

得分：

二.（ 5 分）已知 A 和 B 都是 6×6 阶矩阵，满足 $R(A)=3$，$R(B)=2$. 矩阵 M 是由 A 和 B 按列排出的矩阵，如下：$M=(A\ \ B)$. 现以矩阵 M 作为系数矩阵构成齐次线性方程组 $M\ x=\mathbf{0}$，试估计其解空间维数 d 的范围.

解：

因为 $\max(R(A),R(B))\le R(M)\le R(A)+R(B)$，所以 $3\le R(M)\le 5$.

由于齐次线性方程组 $M\ x=\mathbf{0}$ 有 12 个未知数，同时解空间的维数等于 $12-R(M)$，

因此齐次线性方程组 $M\ x=\mathbf{0}$ 解空间维数满足　$7\le d\le 9$.

得分：

三.（ 5 分）试利用二次型理论求解在满足 x 为单位向量时二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 的最大值，同时写出 x.

解：$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，令 $x=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&2/3\\-2/3&1/3&2/3\\2/3&2/3&1/3\end{pmatrix}y$

于是原二次型可化为 $f=5y_1^2+2y_2^2-y_3^2$.

取 $y=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，从而，　当 $x=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ 时，f 有最大值 5.

学　院
班　级
学　号
姓　名

密 封 线

得分：

四.（5 分）已知 4 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\-2&1&3&-4\\3&-1&0&3\\-4&1&-3&-2\end{pmatrix}$. 令 U 是矩阵 A 列向量的生成空间. 试说明由与 U 中所有向量都正交的向量所组成的集合构成线性空间，并求出该空间的一组基.

解：　令该集合为 S，于是有　$S=\{x\,|\,A^Tx=0\}$，因为齐次线性方程组解集合构成线性空间，因此集合 S 构成线性空间.

$$A^T=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&3&0&-3\\1&-4&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1=0,\\x_2=x_4,\\x_3=2x_4,\end{cases}\text{所以，}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\text{为 S 的一组基.}$$

得分：

五.（5 分）已知 5 阶方阵 A 满足 $A^2=2A$ 且 $R(A)=3$，试给出理由说明矩阵 A 是否可相似对角化. 若能相似对角化，请写出与矩阵 A 相似的对角矩阵.

解：由于 $A(2E-A)=O$ 且 $R(A)=3$，所以矩阵 A 有特征值 $0,2$，而且满足

$R(A)+R(2E-A)=5$, 于是矩阵 A 有 5 个线性无关特征向量，

因此矩阵 A 能相似对角化.

因为 $R(A)=3$，所以矩阵 A 的 5 个特征值为　0，0，2，2，2

于是与矩阵 A 相似的对角矩阵为　$Diag(2,2,2,0,0)$.

得分：

六.（5 分）试利用二次型理论讨论二次方程

$$f=2x^2-12xy+2y^2-8x+8y+5=0$$

表示何种圆锥曲线（椭圆、抛物线、双曲线）.

解：$A=\begin{pmatrix}2&-6\\-6&2\end{pmatrix}$　　$f=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-8,8)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5$

令 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

因为 $\begin{pmatrix}-1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2&-6\\-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&-4\end{pmatrix}$,

所以有 $f=(u,v)\begin{pmatrix}8&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+(16/\sqrt2,0)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+5$

$$=8u^2-4v^2+8\sqrt2u+5=8(u+\sqrt2/2)^2-4v^2+1=0$$

因此二次方程 f 表示双曲线.