学院
班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学考试试卷（B 闭卷）

2016 — 2017 学年第 二 学期

课程名称：线性代数

总分	一	二	三	四	五	六						

得分：

一.（5 分）设 A 是 5 阶非零方阵，满足 $A^2=O$，试求齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系中解向量个数的范围.

解： 因为矩阵 A 是 5 阶非零方阵，所以 $1\le R(A)\le 5$.

又因为 $A^2=O$，所以 $R(A)+R(A)=2R(A)\le 5\Rightarrow R(A)\le 2$.

因为 n 元齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 基础解系中含有 $n-R(A)$ 个解，

所以，齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系中解向量个数的范围是 $3\le 5-R(A)\le 4$.

得分：

二.（5 分）已知 3×5 阶矩阵 A 的秩等于 2，

（1）试确定齐次线性方程组 $A^TAx=0$ 解空间的维数；

（2）对于任意的 3 维列向量 β，试判断方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 是否有解？

解： 因为 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 有相同的解空间，进而有相同的维数，

所以 $Rank(A^TA)=Rank(A)=2$.

因为 齐次线性方程组 $A^TAx=0$ 解空间的维数等于 $5-R(A^TA)$，

所以齐次线性方程组 $A^TAx=0$ 解空间的维数等于 3.

因为 $R(A)=R(A^TA)\le R(A^TA\ \ A^T\beta)=R(A^T(A\ \ \beta))\le R(A^T)=R(A)$，

所以有，$R(A^TA)=R(A^TA\ \ A^T\beta)$，

进而 方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 有解.

得分：

三.（5 分）已知三维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta\neq 0$，$\alpha^T\beta\neq 1$. 试求矩阵 $E-\alpha\beta^T$ 的所有特征值，并判断矩阵 $E-\alpha\beta^T$ 是否可逆.

解： 因为 $(E-\alpha\beta^T)\alpha=(1-\beta^T\alpha)\alpha$，

所以 $1-\beta^T\alpha$ 是一个特征值.

令 η_1,η_2 是互异的两个非零向量，满足 $\eta_1^T\beta=0$，$\eta_2^T\beta=0$。

因为 $(E-\alpha\beta^T)\eta_i=\eta_i, i=1,2$，所以 1 是一个代数重数至少是 2 的特征值.

因此，矩阵 $E-\alpha\beta^T$ 的所有特征值是 $1-\beta^T\alpha$，1，1.

因为矩阵的行列式等于所有特征值的乘积，

所以 $E-\alpha\beta^T$ 的行列式等于 $1-\beta^T\alpha\neq 0$，进而，$E-\alpha\beta^T$ 为可逆矩阵.

学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

得分：

四.（5 分）若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 可相似对角化，试确定常数 a 的值，进一步求出相似变换矩阵和对角矩阵.

解：　由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=6,\ \lambda_3=-2$，

因为矩阵 A 能相似对角化，所以 $Rank(6E-A)=1$，进而可知 $a=0$.

通过计算可得，属于特征值 6 的两个线性无关特征向量为 $(0,0,1)^T,(1,2,0)^T$，

属于特征值 -2 的特征向量为 $(1,-2,0)^T$. 令 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$,

则有　$P^{-1}AP=D$.

得分：

五.（5 分）所有 2 阶下三角矩阵组成的线性空间中，求线性变换 $\mathscr{A}(A)=A^*$ 在基 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵，其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵.

解：因为 $\mathscr{A}(\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}c&0\\-b&a\end{pmatrix}$, 所以 $\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_3$，$\mathscr{A}(\varepsilon_2)=-\varepsilon_2$，$\mathscr{A}(\varepsilon_3)=\varepsilon_1$.

因为 $\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_3=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,　$\mathscr{A}(\varepsilon_2)=-\varepsilon_2=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$,

$\mathscr{A}(\varepsilon_3)=\varepsilon_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,

所以　$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

其中 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 ε_1，ε_2，ε_3 下的矩阵.

得分：

六.（5 分）某个乡镇中，每年有 30%的已婚男性离婚，20%的单身男性结婚. 现该乡镇中有 8000 位已婚男性和 2000 位单身男性. 假设所有男性的总数为一常数，1 年后，有多少已婚男性和单身男性？2 年后呢？n 年后呢？遥远的未来呢？

解：令 $A=\begin{pmatrix}0.7&0.2\\0.3&0.8\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}8000\\2000\end{pmatrix}$,

于是 1 年后已婚男性和单身男性的人数为 $Ax=\begin{pmatrix}6000\\4000\end{pmatrix}$；

2 年后已婚男性和单身男性的人数为 $A^2x=\begin{pmatrix}5000\\5000\end{pmatrix}$；

n 年后已婚男性和单身男性的人数为

$$A^nx=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0.5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}^{-1}x=\begin{pmatrix}(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}2^{-n})8000+(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}2^{-n})2000\\(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}2^{-n})8000+(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}2^{-n})2000\end{pmatrix};$$

在遥远的未来，已婚男性和单身男性的人数为 $\begin{pmatrix}(\frac{2}{5})8000+(\frac{2}{5})2000\\(\frac{3}{5})8000+(\frac{3}{5})2000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4000\\6000\end{pmatrix}$.