习题选解

第一章习题1.1(第7页)

1. 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间Ω与随机事件A:

(1)抛一颗骰子，观察向上一面的点数，A表示“出现奇数点”.

$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A=\{1, 3, 5\}$.

(2)对一个目标进行射击，一旦击中便停止射击，观察射击的次数，A表示“射击不超过3次”.

$\Omega=\{1, 2, 3, \ldots\}$，$A=\{1, 2, 3\}$

(3)把单位长度的一根细棒折成三段，观察各段的长度，A表示“三段细棒能构成一个三角形”.

$$\Omega=\{(a, b, 1-a-b) \mid a, b>0 \text{且} a+b<1\},$$

$$=\{(a, b, c) \mid a, b, c>0 \text{且} a+b+c=1\},$$

$$A=\{(a, b, 1-a-b) \mid 0<a, b<0.5 \text{且} a+b>0.5\}$$

$$=\{(a, b, c) \mid 0<a, b, c<0.5 \text{且} a+b+c=1\}$$

2. 把 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示成n个两两互不相容事件的和。

解 n = 2时， $A_1 \bigcup A_2 = A_1 \bigcup (A_2 - A_1) = A_1 \bigcup (A_2 \bigcap \overline{A}_1)$

n = 3时， $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = A_1 \bigcup (A_2 - A_1) \bigcup [A_3 - (A_1 \bigcup A_2)]$

$$= A_1 \bigcup (A_2 \bigcap \overline{A}_1) \bigcup (A_3 \bigcap \overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2)$$

一般地，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcup (A_2 \bigcap \overline{A}_1) \bigcup (A_3 \bigcap \overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2) \bigcup \cdots \bigcup (A_n \bigcap \overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2 \cdots \bigcap \overline{A}_{n-1})$$

$$= A_1 + A_2 \overline{A}_1 + A_3 \overline{A}_2 \overline{A}_1 + \cdots + A_n \overline{A}_{n-1} \overline{A}_{n-2} \cdots \overline{A}_1$$

3. 在某班学生中任选一个同学，以 A 表示选到的是男同学，B 表示选到的人不喜欢唱歌，C 表示选到的人是运动员.

(1) 表述 $AB\overline{C}$ 及 $A\overline{B}C$；

$AB\overline{C}$ 表示：选到的是不喜欢唱歌不是运动员的男同学.

$A\overline{B}C$ 表示：选到的是喜欢唱歌的男运动员同学.

(2) 什么条件下成立 $ABC=A$?

成立的条件是：男同学一定是不喜欢唱歌的运动员.

(3) 何时成立 $\overline{C}\subset B$?

成立的条件是：非运动员同学一定不喜欢唱歌.

(4) 何时同时成立 $A=B$ 与 $\overline{A}=C$?

成立的条件是：男同学都不是运动员都不喜欢唱歌，女同学都是喜欢唱歌的运动员.

4. 设A,B,C为三个随机事件，用A,B,C的运算及关系表示下列各事件：

(1) A发生,B与C不发生； $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-(B+C)$

(2) A和B都发生,而C不发生； $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$

(3) A, B, C至少有一个发生； $A+B+C$ 或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$

(4) A, B, C都发生； ABC

(5) A, B, C都不发生； $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A+B+C}$

(6) A,B,C不多于一个发生； $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$

(7) A,B,C不多于两个发生； $\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

(8) A,B,C至少有二个发生； $AB+AC+BC$ 或 事件(6)的非事件

第一章习题1.2(第12页)

1. 某城市共发行三种报纸A, B, C, 已知城市居民订购A的占45%, 订购B的占35%, 订购C的占30%, 同时订购A与B的占10%, 同时订购A与C的占8%, 同时订购B与C的占5%, 同时订购A, B, C的占3%, 求下列事件的概率:

(1) 只订购A;

$$
\begin{aligned}
P(A-(B+C)) &= P(A)-P(A(B+C)) \\
&= P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC) \\
&= 0.45-0.1-0.08+0.03=0.3
\end{aligned}
$$

(2) 只订购A与B;

$$P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)=0.1-0.03=0.07$$

1. 某城市共发行三种报纸A, B, C, 已知城市居民订购A的占45%, 订购B的占35%, 订购C的占30%, 同时订购A与B的占10%, 同时订购A与C的占8%, 同时订购B与C的占5%, 同时订购A, B, C的占3%, 求下列事件的概率:

(3) 只订购一种报纸;

由(1)知: $P\{\text{只订购}A\}=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)=0.3$

同理, $P\{\text{只订购}B\}=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)=0.23$

$P\{\text{只订购}C\}=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.2$

所以, $P\{\text{只订购一种报纸}\}=0.3+0.23+0.2=0.73$

或 $P=P(A+B+C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+2P(ABC)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(AC)-2P(BC)+3P(ABC)$

$=0.45+0.35+0.3-0.2-0.16-0.1+0.09=0.73$

1. 某城市共发行三种报纸A, B, C, 已知城市居民订购A的占45%, 订购B的占35%, 订购C的占30%, 同时订购A与B的占10%, 同时订购A与C的占8%, 同时订购B与C的占5%, 同时订购A, B, C的占3%, 求下列事件的概率:

(4) 正好订购两种报纸;

$$P\{\text{正好订购}A,B\}=P(AB)-P(ABC)=0.07$$

$$P\{\text{正好订购}A,C\}=P(AC)-P(ABC)=0.05$$

$$P\{\text{正好订购}B,C\}=P(BC)-P(ABC)=0.02$$

所以, $P\{\text{正好订购两种报纸}\}=0.14$

或直接写出: $P\{\text{正好订购两种报纸}\}$

$$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)$$

$$=0.1+0.08+0.05-0.09=0.14$$

1. 某城市共发行三种报纸A, B, C, 已知城市居民订购A的占45%, 订购B的占35%, 订购C的占30%, 同时订购A与B的占10%, 同时订购A与C的占8%, 同时订购B与C的占5%, 同时订购A, B, C的占3%, 求下列事件的概率:

(5) 至少订购一种报纸;

$$P\{\text{至少订购一种报纸}\}=P\{\text{只订购一种报纸}\}+P\{\text{正好订购两种报纸}\}+P\{\text{订购三种报纸}\}=0.9$$

或 $$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.9$$

(6) 不订购任何报纸;

$$P\{\text{不订购任何报纸}\}=1-P\{\text{至少订购一种报纸}\}=1-0.9=0.1$$

1. 某城市共发行三种报纸A, B, C, 已知城市居民订购A的占45%, 订购B的占35%, 订购C的占30%, 同时订购A与B的占10%, 同时订购A与C的占8%, 同时订购B与C的占5%, 同时订购A, B, C的占3%, 求下列事件的概率:

(7) 至多订购一种报纸;

P{至多订购一种报纸}

= P{不订购任何报纸} + P{只订购一种报纸}

$= 0.1 + 0.73 = 0.83$

或 P{至多订购一种报纸}

或 = 1 − P{正好订购二种报纸} − P{订购三种报纸}

$= 1 - 0.14 - 0.03 = 0.83$

2. 设在统计课考试中，学生A不及格的概率是0.5，学生B不及格的概率是0.2，两人同时不及格的概率是0.1，求：

(1) 两人中至少有一人不及格的概率；

(2) 两人都及格的概率；

(3) 两人中只有一个人不及格的概率；

解 记A=“学生A不及格”，B=“学生B不及格”，则

(1) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.2-0.1=0.6$

(2) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-0.6=0.4$

(3) P{只有一人不及格}

$=$ P{至少有一人不及格} $-$ P{两人都不及格}

$=0.6-0.1=0.5$

3. 设A, B为两个随机事件，$P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 求$P(\overline{AB})$.

解　由于$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

所以，$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$

4. 设$P(A)=P(B)=0.5$，证明：$P(A\,B)=P(\bar{A}\,\bar{B})$.

证明　$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=1-P(A+B)$

$$=P(\overline{A+B})=P(\bar{A}\,\bar{B})$$

7. 人体血型的一个简化模型包括4种血型和2种抗体：A、B、AB与O型，抗A与抗B．抗体根据血型与人的血液以不同的形式发生作用．抗A只与A、AB型血发生作用，不与B、O型血作用，抗B只与B、AB型血发生作用，不与A、O型血作用，假设一个人的血型是O型血的概率为0.5，是A型血的概率为0.34，是B型血的概率为0.12，求：

(1) 抗A，抗B分别与任意一人的血型发生作用的概率；

(2) 一个人的血型与两种抗体都发生作用的概率．

解 由已知可得：一个人血型是AB型血的概率为0.04.

(1) $P_A=0.34+0.04=0.38$，$P_B=0.12+0.04=0.16$

(2) $P=0.04$

第一章章末习题1(第35页)

1. 已知随机事件A, B满足$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且$P(A)=p$,求$P(B)$.

解 由于 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)$

$$=P(A)+P(B)-1+P(\overline{A+B})$$

$$=P(A)+P(B)-1+P(\bar{A}\bar{B})$$

所以， $P(A)+P(B)-1=0$

即， $P(B)=1-P(A)=1-p$

第一章习题1.3(第19页)

2. 在1500个产品中，有400个次品，1100个正品，从中任取200个，求：(1) 恰有90个次品的概率；(2) 至少有2个次品的概率.

解 (1) $n = C_{1500}^{200}$， $n_1 = C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}$

所以， $P_1 = n_1/n = \dfrac{C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$

(2) $P_2 = 1 - P\{$至多有一个次品$\}$

$= 1 - P\{$没有次品$\} - P\{$恰有一个次品$\}$

$$= 1 - \frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}} - \frac{C_{400}^{1} C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}} = \frac{C_{1500}^{200} - C_{1100}^{200} - C_{400}^{1} C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

3. 一个口袋里装有10只球，分别编有号码1, 2, ...,10, 随机地从这个口袋取三只球，求：

(1) 最小号码是5的概率；(2) 最大号码是5的概率.

解 (1) 组合法：n = C_{10}^3， $n_1 = C_5^2$

所以，$P_1 = n_1/n = \frac{C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} = 0.08333$

(2) $P_2 = n_2/n = \frac{C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 0.05$

或用排列法：

(1) $P_1 = n_1/n = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{12} = 0.08333$

(2) $P_2 = n_2/n = \frac{C_3^1 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{20} = 0.05$

5. 进行一个试验：先抛一枚均匀的硬币，然后抛一个均匀的骰子，

(1) 描述该试验的样本空间；

(2) 硬币是正面且骰子点数是奇数的概率是多少？

解 (1) 设试验是观察硬币正反面和骰子的点数，则

Ω={(正面, 1点), (正面, 2点), (正面, 3点), (正面, 4点), (正面, 5点), (正面, 6点), (反面, 1点), (反面, 2点), (反面, 3点), (反面, 4点), (反面, 5点), (反面, 6点),}

(2) P=3/12=1/4=0.25

6. 假设2个叫Davis的男孩，3个叫Jones的男孩，4个叫Smith的男孩随意地坐在一排9座的座位上．那么叫Davis的男孩刚好坐在前两个座位上，叫Jones的男孩坐在挨着的3个座位上，叫Smith的男孩坐在最后4个座位上的概率是多少？

解 $n = A_9^9 = 9!$， $n_A = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 288$

所以，$P = n_A/n = \dfrac{288}{9!} = \dfrac{1}{1260} = 0.00079365$

7. 某码头只能容纳一只船. 现知某日独立地来两只船，且在24小时内各时刻来到的可能性相等. 若它们需要停靠的时间分别为3小时和4小时，那么有一只船需要等待进入码头的概率是多少?

解 记两艘船到达泊位的时间分别为x, y，则样本空间为：$\Omega=\{(x, y)\mid 0\le x\le 24,\ 0\le y\le 24\}$,

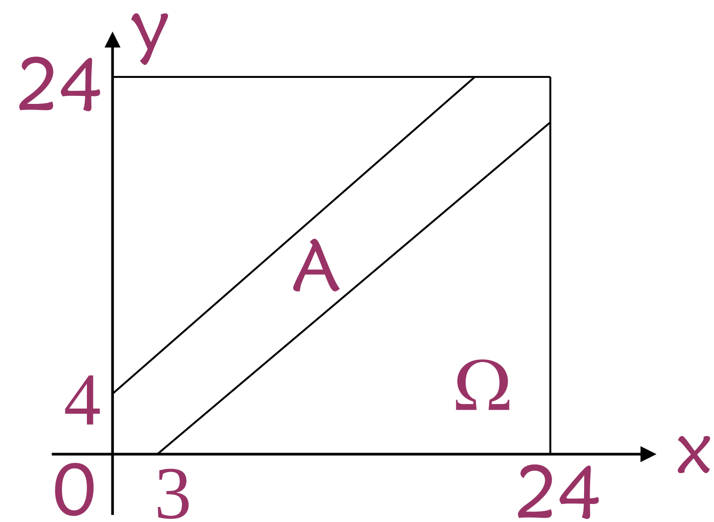
$$A=\{(x, y)\mid (x, y)\in\Omega,\ 且\ -4\le x-y\le 3\}$$

$$m(\Omega)=24^2=576$$

$$m(A)=24^2-21^2/2-20^2/2$$

$$=155.5$$

所以，$P(A)=155.5/576=0.27$



9. 把长度为l的线段任意折成3段，求它们能构成三角形的概率.

解 记3段长度为x, y, z 则有:

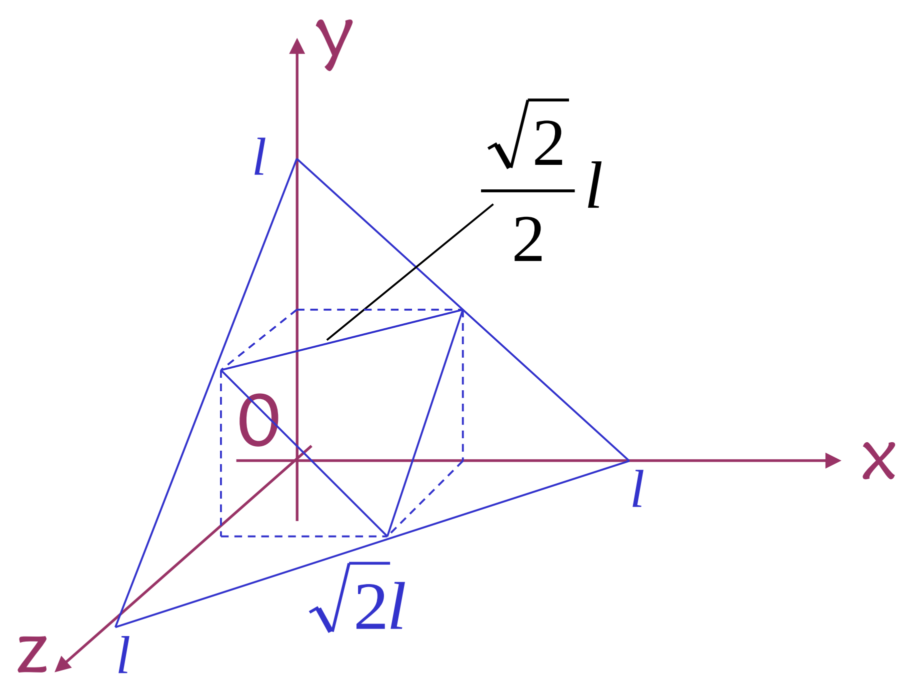
$\Omega=\{(x, y,z)\,|\,x, y, z>0$ 且 $x+y+z=l\}$,

$A=\{(x, y, z)\,|\,0<x, y, z<l/2$ 且 $x+y+z=l\}$

$$m(\Omega)=\frac{\sqrt{3}}{2}l^2$$

$$m(A)=\frac{\sqrt{3}}{8}l^2$$

所以，P(A)=1/4=0.25



第一章章末习题1(第35页)

4. 50只铆钉随机地取来用在10个部件上，其中有3个铆钉强度太弱. 每个部件用3只铆钉. 若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件的强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解　$n = C_{50}^{3} C_{47}^{3} \cdots C_{23}^{3}$，$k = C_{10}^{1} C_{3}^{3} C_{47}^{3} C_{44}^{3} \cdots C_{23}^{3}$

$$p = C_{10}^{1} / C_{50}^{3} = \frac{10 \times 2 \times 3}{48 \times 49 \times 50} = \frac{1}{1960} = 0.00051$$

或，第i个部件强度太弱的概率为：$p_i = \dfrac{C_3^3}{C_{50}^3} = \dfrac{1}{C_{50}^3},\quad i = 1,2,\ldots,10$

所以，发生一个部件强度太弱的概率为：

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_{10} = \frac{10}{C_{50}^3} = 0.00051$$

8. 甲、乙两人轮流掷一颗骰子，每轮掷一次，谁先掷出6点谁取胜，若从甲开始，问甲乙取胜的概率各为多少？

解　由于每轮掷出6点的概率为1/6，掷不出概率为5/6.

所以，第i轮掷出6点的概率为：$p_i=(\frac{5}{6})^{i-1}\cdot\frac{1}{6},\quad i=1,2,\ldots$

显然，奇数轮掷出甲取胜，所以甲取胜的概率为：

$$p_{甲胜}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{5}{6})^{2k}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot[1-(\frac{5}{6})^2]^{-1}=\frac{6}{11}$$

乙取胜的概率为：$p_{乙胜}=1-p_{甲胜}=5/11.$

第一章习题1.4(第23页)

1. 已知$P(A)=0.8$, $P(B)=0.7$, $P(A|B)=0.8$, 求$P(\bar{A}\bar{B})$.

解 由于 $P(AB)=P(B)P(A|B)=0.7\times0.8=0.56$

所以, $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.94$

于是, $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=0.06$

2. 已知$P(\bar{A})=0.3$, $P(B)=0.4$,$P(A\bar{B})=0.5$,求$P(B|A\cup\bar{B})$.

解 $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=0.8$

$P[B(A\cup\bar{B})]=P(BA+\Phi)=P(A)-P(A\bar{B})=0.2$

$P(B|A\cup\bar{B})=P[B(A\cup\bar{B})]/P(A\cup\bar{B})=0.25$

3. 据以往资料,某一3口之家,患某种传染病的概率有以下规律:P{孩子得病}=0.6, P{母亲得病|孩子得病}= 0.5, P{父亲得病|母亲及孩子得病}=0.4. 求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解 P{母亲及孩子得病}

=P{孩子得病}P{母亲得病|孩子得病}=0.3

P{父亲未得病|母亲及孩子得病}=1－0.4=0.6

P{母亲及孩子得病但父亲未得病}

=P{母亲及孩子得病}P{父亲未得病|母亲及孩子得病}

=0.3×0.6=0.18

4. 若M件产品中有m件废品，今在其中任区两件，

(1) 已知取出的两件中至少有一件是废品，求另一件也是废品的概率；

(2) 已知取出的两件中至少有一件不是废品，求另一件是废品的概率；

(3) 求取出的两件中至少有一件是废品的概率.

解 记A_i=“取出的两件中有i件废品”，i=0, 1, 2. 则

$$P(A_0)=\frac{(M-m)(M-m-1)}{M(M-1)},\quad P(A_1)=\frac{2(M-m)m}{M(M-1)},$$

$$P(A_2)=\frac{m(m-1)}{M(M-1)},$$

(1) $P_1 = P(A_2 | A_1 + A_2) = P(A_2)/P(A_1 + A_2)$

$$= \frac{m-1}{2M-m-1}$$

(2) $P_2 = P(A_1 | A_0 + A_1) = P(A_1)/P(A_0 + A_1)$

$$= \frac{2m}{M+m-1},$$

(3) $P_3 = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$$= \frac{(2M-m-1)m}{M(M-1)}$$

5. 为防止意外事故，矿井内同时安装了两个警报系统A与B，每个系统单独使用时，有效率A为0.92，B为0.93，在A失灵条件下B的有效率为0.85，求

(1) 发生事故时，这两个警报系统至少有一个有效的概率.

(2) 在B失灵的条件下，A有效的概率.

解 (1) P(A失灵B有效)=P(A失灵)P(B有效|A失灵)=0.068

所以，P(AB都有效)=P(B有效)－P(A失灵B有效)=0.862

因此，P(AB至少有一个有效)=P(A有效)+P(B有效)－P(AB都有效)=0.92+0.93－0.8636=0.988

(2) P(A有效B失灵)=P(A有效)－P(AB都有效)=0.058

P(A有效|B失灵)=P(A有效B失灵)/P(B失灵)=0.829

6. 一顾客每次购买牙膏都选择品牌A或B，假定初次购买后，以后每次购买时他仍选择上一次品牌的概率为1/3，设该顾客第一次购买时选择A或B的概率相等，求他第一次和第二次都购买A牌牙膏而第三次和第四次都购买B牌牙膏的概率.

解 记A_i=“第i次购买A牌牙膏”，B_i=“第i次购买B牌牙膏”

$$P(A_1A_2B_3B_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(B_3|A_1A_2)P(B_4|A_1A_2B_3)$$

$$=1/2\times1/3\times2/3\times1/3=1/27$$

7. 假定一个箱子里共装有一个蓝色卡片和四个分别记为A, B, C, D的红色卡片. 设从箱子中一次随机地抽出两个卡片.

(1) 若已知卡片A被抽出, 求两个卡片都是红色的概率;

(2) 若已知至少取出一个红色卡片,求两个卡片都是红色的概率.

解(1) P(两个红色|A被取出)=P(A+一红)/P(A被取出)

=(2×1/5×3/4)/(2/5)=3/4

(2) P(两个红色|至少一红)=P(两个红色)/P(至少一红)

=P(两个红色)=4/5×3/4 = 3/5

8. 某人忘了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次就接通所要拨打的电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数，那么此概率又是多少?

解 $P_1 = 1/10+9/10\times 1/9+9/10\times 8/9\times 1/8=3/10=0.3$

$P_2 = 1/5+4/5\times 1/4+4/5\times 3/4\times 1/3=3/5=0.6$

第一章习题1.5(第27页)

1. 已知产品中96%是合格的，现有一种简化的检查方法. 它把真正的合格品确认为合格品的概率为0.98, 而误认废品为合格品的概率为0.05，求以简化法检查为合格品的一个产品确实是合格品的概率。

解 记A="检查为合格品"，B="确实是合格品"，则

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{0.96\times 0.98}{0.96\times 0.98+0.04\times 0.05}$$

$$=0.9979$$

2. 炮战中，在距目标250米，200米，150米处发射的概率分别为0.1，0.7，0.2，命中目标的概率分别为0.05，0.1，0.2，现在已知目标被击毁，求击毁目标的炮弹是由距目标250米处发射的概率.

解 记A="目标被击毁"，B_1="距目标250米处发射"，B_2="距目标200米处发射"，B_3="距目标150米处发射".

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$=\frac{0.1\times0.05}{0.1\times0.05+0.7\times0.1+0.2\times0.2}$$

$$=0.04348$$

3. 已知男性有5%是色盲患者，女性有0.25%是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少?

解 记A="色盲患者"，B_1="男性"，B_2="女性".

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$=\frac{0.5\times0.05}{0.5\times0.05+0.5\times0.0025}$$

$$=0.9524$$

5. 将两条信息分别编码为A和B传递出去，接收站收到时，A被误收作B的概率为0.02，而B被误收作A的概率为0.01. 信息A与信息B传送的频繁程度为2:1. 若接收站收到的信息是A，问原发信息是A的概率是多少?

解 记A=“收到A”，B_1=“发送A”，B_2=“发送B”.

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$=\frac{2/3\times 0.98}{2/3\times 0.98+1/3\times 0.01}$$

$$=0.9949$$

7. 有两箱同种类的零件．第一箱装50只，其中10只一等品；第二箱装30只，其中18只一等品．今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中不放回地抽取零件两次．每次任取一只．求：(1)第一次取到的零件是一等品的概率．(2)第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率．

解　(1) $p_1=0.5\times10/50+0.5\times18/30$

$=1/10+3/10=4/10=0.4$

(2) $P\{\text{都一等}\}=0.5\times10/50\times9/49+0.5\times18/30\times17/29$

$=9/490+51/290=0.194$

$p_2=P\{\text{都一等}\}/p_1=0.4856$

第一章章末习题1(第35页)

5. 一打靶场备有5支某种型号的枪，其中3支已经校正，2只未经校正. 某人使用已校正的枪击中目标的概率为p_1，使用未经校正的枪击中目标的概率为p_2，现在他随机地取了一支枪，射击5次都未击中，求他使用的是已校正的枪的概率(设各次射击的结果相互独立).

解 记A＝“5次都未击中”，B＝“使用的是已校正的枪”

$$P(B|A)=[P(B)P(A|B)]/[P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})]$$

$$=[3/5\times(1-p_1)^5]/[3/5\times(1-p_1)^5+2/5\times(1-p_2)^5]$$

$$=3(1-p_1)^5/[3(1-p_1)^5+2(1-p_2)^5]$$

7. 设甲，乙，丙三门炮同时独立地向某目标射击，命中率分别为0.2，0.3，0.5，目标被命中一发而击毁的概率为0.2，被命中两发而击毁的概率为0.6，被命中三发而被击毁的概率为0.9. 求: (1) 三门炮在一次射击中击毁目标的概率；(2) 若已知目标被击毁，求只由甲炮击中的概率.

解 记A="目标被击毁"，B_i="被命中i发"，(i=1,2,3)

$$P(B_1)=0.2(1-0.3)(1-0.5)+(1-0.2)0.3(1-0.5)$$

$$+(1-0.2)(1-0.3)0.5=0.47$$

$$P(B_2)=0.2\times0.3(1-0.5)+0.2(1-0.3)\times0.5$$

$$+(1-0.2)\times0.3\times0.5=0.22$$

$$P(B_3)=0.2\times0.3\times0.5=0.03$$

(1) $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

$=0.47\times0.2+0.22\times0.6+0.03\times0.9=0.253$

(2) 记$C=$“只有甲命中”．则

$P(C)=0.2(1-0.3)(1-0.5)=0.07$，于是

$P(C|A)=P(AC)/P(A)=P(C)P(A|C)/P(A)$

$=0.07\times0.2/0.253$

$=0.0553$

11. 假设一厂家生产的每台仪器，以概率0.7直接出厂，以概率0.3需进一步调试，经调试以后以概率0.8出厂，以概率0.2定为不合格不能出厂，现该厂新生产了n ($n\geq 2$) 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)，求：(1)全部能出厂的概率α；(2)其中恰好有两台不能出厂的概率β；(3)其中至少有两台不能出厂的概率θ .

解 每台仪器能出厂的概率$p=0.7+0.3\times 0.8=0.94.$

(1) $\alpha=0.94^n$；

(2) $\beta=C_n^2(0.06)^2(0.94)^{n-2}=0.0018n(n-1)(0.94)^{n-2}$

(3) $\theta=1-0.94^n-0.06n(0.94)^{n-1}$

12. 若每蚕产n个卵的概率为$p_n=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n=0,1,2,\ldots(\lambda>0)$，每个卵变为成虫的概率为p,且各卵是否变为成虫是相互独立的，(1) 求每蚕养出k个成虫的概率；(2) 若某蚕养出k个成虫，求它产了n个卵的概率.

解 n个卵变为k个成虫的概率为: $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

(1) 每蚕养出k个成虫的概率为:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{p^k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{p^k\lambda^k e^{-\lambda p}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

(2) P{产n个卵|养出k个成虫}

=P{产n个卵且养出k个成虫}/P{养出k个成虫}

=P{产n个卵}P{养出k个虫|产n个卵}/P{养出k个虫}

$$=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \,/\, \frac{p^k\lambda^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

$$=\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(1-p)}, \quad n=k,k+1,k+2,\dots$$

第一章习题1.6(第34页)

2. 一旦危险情况C发生，报警电路会闭合发出警报. 借助两个或更多开关并联的报警电路可以增强报警系统的可靠性. 现在有两个开关并联的报警电路，每个开关有0.96的可靠性，问这个报警系统的可靠性是多少？如果要求报警系统的可靠性至少为0.9999，则至少需要多少只开关并联？假设各开关的闭合与否是相互独立的.

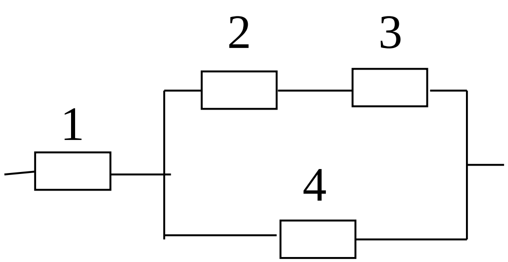
解 记A_i=“i个开关并联的系统发出警报”，则

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-0.04^2=0.9984$$

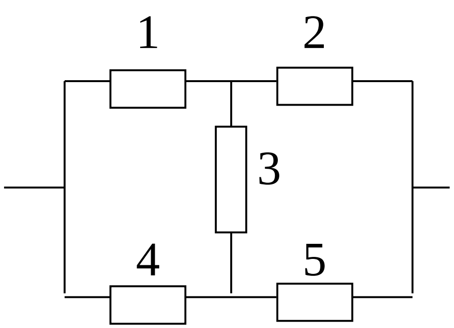
$$P(A_n)=1-P(\overline{A}_n)=1-0.04^n\geq 0.9999$$

解得: $n\geq \ln 0.0001/\ln 0.04=2.86$. 故至少需要3只开关并联.

3. 求下图所示的两个系统的可靠性，假设元件i的可靠性为p_i，各元件正常工作与否相互独立。



2题图(a)



2题图(b)

解 (a) 易得：2-3子系统的可靠性是p_2p_3.

2-3-4子系统的可靠性是：

$$1-(1-p_4)(1-p_2p_3)=p_4+p_2p_3-p_2p_3p_4$$

系统的可靠性为：

系统的可靠性为：$p_1(p_4+p_2p_3-p_2p_3p_4)$.

(b) 若以A_i表示"第i个元件正常工作", $i=1, 2, \ldots, n$. 则系统的可靠性为:

$$
\begin{aligned}
p &= P\{A_1A_2+A_1A_3A_5+A_4A_5+A_2A_3A_4\} \\
&= P\{A_1A_2\}+P\{A_1A_3A_5\}+P\{A_4A_5\}+P\{A_2A_3A_4\} \\
&\quad - P\{A_1A_2A_3A_5\} - P\{A_1A_2A_4A_5\} - P\{A_1A_2A_3A_4\} \\
&\quad - P\{A_1A_3A_4A_5\} - P\{A_1A_2A_3A_4A_5\} - P\{A_2A_3A_4A_5\} \\
&\quad +4P\{A_1A_2A_3A_4A_5\} - P\{A_1A_2A_3A_4A_5\} \\
&= P\{A_1A_2\}+P\{A_1A_3A_5\}+P\{A_4A_5\}+P\{A_2A_3A_4\} \\
&\quad - P\{A_1A_2A_3A_5\} - P\{A_1A_2A_4A_5\} - P\{A_1A_2A_3A_4\} \\
&\quad - P\{A_1A_3A_4A_5\} - P\{A_2A_3A_4A_5\} + 2P\{A_1A_2A_3A_4A_5\} \\
&= p_1p_2 + p_4p_5+p_1p_3p_5+p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_5 \\
&\quad - p_1p_2p_4p_5 - p_1p_3p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5
\end{aligned}
$$

4. 根据以往记录的数据分析，某船只运送某种物资损坏的情况共有三种：损坏2%(记为A_1)，损坏10%(记为A_2)，损坏90%(记为A_3)，且$P(A_1)=0.8$, $P(A_2)=0.15$, $P(A_3)=0.05$，现从已被运送物资中随机取3件，发现3件都是好的(记为B)，求：$P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $P(A_3|B)$.（假设物资件数很多）.

解 $P(B|A_1)=(1-0.02)^3=0.941$

$P(B|A_2)=(1-0.1)^3=0.729$

$P(B|A_3)=(1-0.9)^3=0.001$

所以 $P(A_1|B)=P(A_1)P(B|A_1)/[P(A_1)P(B|A_1)$

$+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)]$

$=0.8\times0.941/[0.8\times0.941+0.15\times0.729+0.05\times0.001]$

$=0.7528/[0.7528+0.10935+0.00005]=0.873$

$$P(A_2|B)=P(A_2)P(B|A_2)/[P(A_1)P(B|A_1)$$
$$+P(A_2)P(B|A_2)+ P(A_3)P(B|A_3)]$$
$$=0.15\times0.729/[0.8\times0.941+0.15\times0.729+0.05\times0.001]$$
$$=0.10935/[0.7528+0.10935+0.00005]=0.127$$
$$P(A_3|B)=P(A_3)P(B|A_3)/[P(A_1)P(B|A_1)$$
$$+P(A_2)P(B|A_2)+ P(A_3)P(B|A_3)]$$
$$=0.05\times0.001/[0.8\times0.941+0.15\times0.729+0.05\times0.001]$$
$$=0.00005/[0.7528+0.10935+0.00005]=0.000058$$

5. 将A,B,C三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α,而输出为其它一字母的概率都是(1−α)/2. 今将字母串AAAA,BBBB,CCCC之一输入信道，输入AAAA，BBBB，CCCC的概率分别为$p_1,p_2,p_3(p_1+p_2+p_3=1)$，已知输出为ABCA，问输入的是AAAA的概率是多少？（设信道传输各个字母的工作是相互独立的.）

解 $$P=\frac{p_1\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2}{p_1\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2+p_2\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3+p_3\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3}$$

$$=2\alpha p_1/(1-\alpha-p_1+3\alpha p_1)$$

6. 设在第一台车床上制造一级品零件的概率为0.7, 在第二台车床上制造一级品零件的概率为0.8, 第一台车床制造了2个零件, 第二台车床制造了3个零件, 求这5个零件均为一级品的概率.

解 $P=0.7^2\times0.8^3=0.2509$

7. 设实验室产生甲类细菌和乙类细菌的机会是相等的, 若某次产生了2n个细菌, 求: (1) 至少有一个是甲类细菌的概率; (2) 甲, 乙两类细菌各占一半的概率.

解 (1) $P_1=1-(0.5)^{2n}$

(2) $P_2=C_{2n}^{n}(0.5)^{2n}$

8. 设每次射击打中目标的概率是0.001，射击5000次，求至少击中两弹的概率.

解 $P\{\text{至少击中两弹}\}=1-P\{\text{一弹未中}\}-P\{\text{只中一弹}\}$

$$=1-0.999^{5000}-5000\times0.001\times0.999^{4999}$$

$$=0.9596$$

第一章章末习题1(第35页)

3. 设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率为1/9，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，求P(A).

解　由于 $P(A)P(\bar{B})=P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)$

所以　$P(A)[1-P(B)]=[1-P(A)]P(B)$

故　$P(A)=P(B)$

又由于　$P(\bar{A}\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]=1/9$

所以　$1-P(A)=1/3$

故　$P(A)=2/3$

6. 将一颗骰子掷两次，考虑两事件A, B: A=“第一次掷得点数为2或5”, B=“两次点数之和至少为7”，(1) 求P(A), P(B)；(2) 判断A, B是否相互独立.

解 (1) $P(A)=2/6=1/3$；$P(B)=21/36=7/12$

(2) $P(AB)=7/36=P(A)P(B)$

所以，事件A, B相互独立.

10. 一射手对同一目标独立地进行四次射击后，至少命中一次的概率为80/81，求该射手的命中率.

解 设该射手的命中率为p，则有：

$$1-(1-p)^4=80/81$$

所以，$(1-p)^4=1/81$

故，该射手的命中率为：$p=2/3$.

第二章习题2.1(第38页)

举出几个你所熟悉的能用随机变量来描述的社会或生活现象.

随机抽出一同学，他成绩在90分以上的课程数。

抛掷5枚硬币，正面朝上的个数。

买10张彩票，中奖情况.

在一些人中随机找一人测其身高。等等。

第二章习题2.2(第49页)

1. 问c取何值才能使下列数列成为分布律:

(1) $f(k)=\dfrac{c}{N}, k=1,2,\dots,N;$

(2) $f(k)=c\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}, k=1,2,\dots,$ ($\lambda>0$为常数).

解 (1) 由 $\sum_{k=1}^{N}\dfrac{c}{N}=c=1$，得： c=1.

(2) 由于 $\sum_{k=1}^{\infty}c\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}=c\cdot(e^{\lambda}-1)=1$

所以，$c=1/(e^{\lambda}-1)$.

2.已知随机变量X只取$-1, 0, 1, 2$四个值,相应概率依次为$1/2c, 3/4c, 5/8c, 7/16c$,试确定常数c,并求$P\{X<1|X\neq 0\}$.

解 由分布律的性质有:

$$1/2c+3/4c+5/8c+7/16c=37/16c=1$$

所以,$c=37/16$.

$$P\{X<1|X\neq 0\}=P\{X<1 \text{且} X\neq 0\}/P\{X\neq 0\}$$

$$=P\{X=-1\}/[1-P\{X=0\}]$$

$$=(8/37)/[1-12/37]$$

$$=8/25$$

3. 一批产品分一、二、三级，其中一级品是二级品的两倍，三级品是二级品的一半. 从这批产品中随机地抽取一个检验质量，试用随机变量描述检验的可能结果，并写出其分布律.

解 记$X=i$为检验结果为i级品，则X只能取1, 2, 3.

若设$P\{X=2\}=p$，则$P\{X=1\}=2p$，$P\{X=3\}=0.5P$，于是

$p+2p+0.5p=1$，即$p=2/7$.

即X的分布律为：

$P\{X=1\}=4/7$.

$P\{X=2\}=2/7$. 或写成：$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4/7 & 2/7 & 1/7\end{pmatrix}$

$P\{X=3\}=1/7$.

4. 某运动员的投篮命中率为0.4，写出他一次投篮命中数X的分布律.

解　显然，X只能取0，1，其分布律为：

$$P\{X=0\}=0.6,\ P\{X=1\}=0.4.$$

或写成：

X	0	1
P	0.6	0.4

，或 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$

5. 上抛两枚硬币，写出正面朝上的个数Y的分布律.

解　显然，Y只能取0, 1, 2，其分布律为：

$$P\{Y=0\}=0.25,\ P\{Y=1\}=0.5,\ P\{Y=2\}=0.25.$$

7. 设随机变量$X\sim B(6, p)$，已知$P\{X=1\}=P\{X=5\}$，求$P\{X=2\}$的值.

解　由于$X\sim B(6, p)$，所以，$P\{X=k\}=C_6^k p^k(1-p)^{6-k}$，由已知有：$6p(1-p)^5=6p^5(1-p)$，所以，$p=0.5$.

因此，$P\{X=2\}=15\times0.5^2\times0.5^4=15/64\approx0.2344$

8. 已知事件A在一次试验中发生的概率为0.3，当A发生不少于三次时，指示灯将发出信号，若按一下两种方式进行试验，分别求指示灯发出信号的概率.

(1) 进行5次重复独立试验;(2) 进行7次重复独立试验.

解　(1) $P\{X\geqslant3\}=\sum_{k=3}^{5}C_5^k 0.3^k 0.7^{5-k}\approx0.1631$

(2) $P\{X\geqslant3\}=1-P\{X<3\}=1-\sum_{k=0}^{2}C_7^k 0.3^k 0.7^{7-k}\approx0.3529$

9 某实验室有自动控制的仪器10台，相互独立地运行，发生故障的概率都是0.03，在一般情况下，一台仪器的故障需要一个技师处理．问配备多少技师可以保证在设备发生故障时不能及时处理的概率小于0.05.

解 记X="同时发生故障仪器的台数"，则X~B(10, 0.03)

令 $p\{X>N\}\leqslant 0.05$， 则 $P\{X\leqslant N\}>0.95$

因为：$P\{X=0\}=0.97^{10}=0.7374$

$P\{X=1\}=10\times 0.03\times 0.97^{9}=0.2281$

所以，$P\{X\leqslant 1\}=0.7374+0.2281=0.9655>0.95$

因此， 取N=1便满足条件。

即，配备一名技师便可以保证设备发生故障....

11. 某救援站在长度为t的时间(单位:h)内收到救援信号的次数X服从P(t/2)分布且与时间的起点无关，试求某天下午救援站在1点至6点间至少收到一次救援信号的概率.

解 由已知，1点至6点收到救援信号的次数$X\sim P(5/2)$，

所以， $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-e^{-2.5}\approx 0.9179$

12. 若$X\sim P(\lambda)$且$P\{X=2\}=P\{X=3\}$，求$P\{X=5\}$.

解 由已知有：$\lambda^2 e^{-\lambda}/2=\lambda^3 e^{-\lambda}/6$，所以，$\lambda=3$

所以， $P\{X=5\}=\lambda^5 e^{-\lambda}/5!=3^5 e^{-3}/5!\approx 0.1008$

13. 设步枪射击飞机的命中率为0.001，今射击6000次，试按泊松分布近似计算步枪至少击中飞机两弹的概率，并求最可能击中数.

解 记X为击中弹数，则 $X \sim B(6000, 0.001) \overset{\text{近似}}{\sim} P(6)$

所以，$P\{X \geqslant 2\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\}$

$$\approx 1 - e^{-6} - 6e^{-6} \approx 0.9826$$

实际上，$P\{X \geqslant 2\} = 1 - 0.999^{6000} - 6000 \times 0.001 \times 0.999^{5999}$

$$\approx 0.9827$$

X的最可能数为：$[(n+1)p] = [6.001] = 6$

即，最可能击中数为6。

15. 在有8件正品，2件次品的10件产品中随机地取3件，写出取出的次品数X的分布律.

解　$X \sim H(10, 2, 3)$，其分布律为:

$P\{X=0\}=8/10\times 7/9\times 6/8=7/15$

$P\{X=1\}=3\times 8/10\times 7/9\times 2/8=7/15$

$P\{X=2\}=3\times 8/10\times 2/9\times 1/8=1/15$

16. 在一副扑克牌中(按54张计)随机地抽出5张，求抽出黑桃张数的概率分布.

解　黑桃张数$X \sim H(54, 13, 5)$，其分布律为:

$$P\{X=k\}=\frac{C_{13}^{k}C_{41}^{5-k}}{C_{54}^{5}},\quad k=0,1,2,3,4,5$$

17. 一批产品的次品率为0.02，从中任取20件，现已初步查出2件次品，求20件中次品数不小于3的概率.

解　20件中次品数$X \sim B(20, 0.02)$，于是，

$P\{X \geqslant 3 | X \geqslant 2\} = P\{X \geqslant 3\}/P\{X \geqslant 2\}$

$= [1-P\{X < 3\}]/[1-P\{X < 2\}]$

$= [1-0.98^{20}-20 \times 0.02 \times 0.98^{19}-190 \times 0.02^{2} \times 0.98^{18}]/$

$[1-0.98^{20}-20 \times 0.02 \times 0.98^{19}] \approx 0.1185$

18. 自动生产线在调整之后出现废品的概率为p，且生产过程中一旦出现废品即刻重新进行调整．求在两次调整之间生产的合格品数的分布律.

解　合格品数$X+1 \sim G(P)$，于是，其分布律为：

$P\{X=k\} = (1-p)^{k}p$，$k=0, 1, 2, \ldots$

19. 某射手有5发子弹,每射一发子弹的命中率都是0.7,如果命中目标就停止射击,不中目标就一直射击到子弹用完为止,试求所用子弹数X的分布律.

解　显然,X只能取1, 2, 3, 4, 5, X的分布律为:

$P\{X=1\}=0.7;$

$P\{X=2\}=0.3\times0.7=0.21;$

$P\{X=3\}=0.3^2\times0.7=0.063;$

$P\{X=4\}=0.3^3\times0.7=0.0189;$

$P\{X=5\}=0.3^4=0.0081.$

20. 从有10件正品，3件次品的产品中一件一件地抽取，每次抽取时，各件产品被抽到的可能性相等。在下列三种情形下，分别写出直到取得正品为止所需抽取次数X的分布律。

(1) 每次取出的产品不再放回；

(2) 每次取出的产品立即放回；

(3) 每次取出一件产品后随即放回一件正品。

解 (1) X只能取1, 2, 3, 4，其分布律为：

$P\{X=1\}=10/13$;

$P\{X=2\}=3/13\times 10/12=5/26$;

$P\{X=3\}=3/13\times 2/12\times 10/11=5/143$;

$P\{X=4\}=3/13\times 2/12\times 1/11=1/286$.

解 (2) $X \sim G(10/13)$，其分布律为：

$P\{X=k\}=(3/13)^{k-1}(10/13)$，$k=1, 2, 3, \ldots$;

(3) X只能取1, 2, 3, 4，其分布律为：

$P\{X=1\}=10/13$;

$P\{X=2\}=3/13\times 11/13=33/169.$

$P\{X=3\}=3/13\times 2/13\times 12/13=72/2197.$

$P\{X=4\}=3/13\times 2/13\times 1/13=6/2197.$

第二章章末习题2(第72页)

5. 火炮向某目标独立射击，每发炮弹命中目标的概率为0.6，且只要命中一发目标就被摧毁. 今发射4发，求摧毁目标的概率. 若使目标被摧毁的概率达到0.999以上，则至少要发射多少发炮弹？

解 4法炮弹中命中目标数$X \sim B(4, 0.6)$，所以

$$P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.4^4 = 0.9744$$

若记N发炮弹命中目标数Y，则$Y \sim (N, 0.6)$，于是

$$P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.4^N \geqslant 0.999$$

则，$N \geqslant \ln 0.001 / \ln 0.4 \approx 7.539$.

故，至少要发射8发炮弹，可使目标被摧毁的概率达到0.999.

7. 某种动物出现畸形概率为0.001，如果在相同的环境中观察5000例，试按泊松分布近似计算其中至多有两例是畸形的概率，并求最可能畸形例数.

解 记X为畸形例数，则 $X \sim B(5000, 0.001) \overset{\text{近似}}{\sim} P(5)$

所以，$P\{X \leqslant 2\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\}$

$$\approx e^{-5} + 5e^{-5} + 5^2 e^{-5}/2 \approx 0.1247$$

X的最可能数为：$[(n+1)p] = [5.001] = 5$

即，最可能畸形例数为5。

9. 袋中装有1个白球，4个红球，每次从中任取一球，直到取出白球为止，试写出取球次数X的分布律．假定取球方式为每次取出的红球不再放回，或者每次取出的红球放回．

解　取出的红球不放回，则X的分布律为：

$P\{X=1\}=1/5$, $P\{X=2\}=4/5\times1/4=1/5$,

$P\{X=3\}=4/5\times3/4\times1/3=1/5$,

$P\{X=4\}=4/5\times3/4\times2/3\times1/2=1/5$

$P\{X=5\}=4/5\times3/4\times2/3\times1/2=1/5$

每次取出的红球再放回，则$X\sim G(1/5)$，其分布律为：

$P\{X=k\}=(4/5)^{k-1}\times1/5=2^{2k-2}/5^k$, $k=1, 2, 3,\ldots$

第二章习题2.3(第58页)

1. 已知随机变量X～$f(x)=\begin{cases} cx^2, & 0<x<3 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，求(1) 常数c;

(2) P{1<X<2}，P{X⩽1}，P{X=2}.

解 (1) 由于$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^3 cx^2dx=9c$，所以，c=1/9.

(2) $P\{1<X<2\}=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^2/9dx=7/27$

$P\{X\le 1\}=\int_{-\infty}^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2/9dx=1/27$

P{X=2}=0.

2. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{c}e^{-\frac{x^2}{2c}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ (c为正的常数)为密度函数.

证明 显然$f(x)\geqslant 0$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{c}e^{-\frac{x^2}{2c}}dx=-e^{-\frac{x^2}{2c}}\Big|_0^{+\infty}=1$$

所以，$f(x)$是密度函数.

3. 设X～U(－2, 3)，写出X的密度函数.

证明 密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & -2<x<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

6. 设$X \sim E(2)$, (1) 写出X的密度函数; (2) 求$P\{-1<X<2\}$, $P\{1<X<3\}$, $P\{X\leqslant 5\}$和$P\{X>4\}$.

证明 (1) X的密度函数为: $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geq 0\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) $P\{-1<X<2\}=P\{0\leqslant X<2\}=1-e^{-4}\approx 0.9817$

$p\{1<x<3\}=e^{-2}-e^{-6}\approx 0.1329$

$p\{x\leqslant 5\}=1-e^{-10}\approx 0.99995$

$p\{x>4\}=e^{-8}\approx 0.0003355$

10. 设$X \sim N(-1, 16)$，求$P\{X<2.44\}$, $P\{X>-1.5\}$，$P\{X<-2.8\}$，$P\{|X|<4\}$及$|X-1|>1\}$.

解 $P\{X<2.44\}=\Phi((2.44+1)/4)=\Phi(0.86)=0.8051$

$P\{X>-1.5\}=1-\Phi((-1.5+1)/4)=\Phi(0.125)\approx 0.55$

$P\{X<-2.8\}=\Phi((-2.8+1)/4)=1-\Phi(0.45)=0.3264$

$$P\{|X|<4\}=\Phi((4+1)/4)-\Phi((-4+1)/4)$$
$$=\Phi(1.25)+\Phi(0.75)-1=0.6678$$

$$P\{|X-1|>1\}=P\{X<0\}+P\{X>2\}$$
$$=\Phi(0.25)+1-\Phi(0.75)=0.8253$$

11. 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，方程$y^2+4y+X=0$无实根的概率为0.5，求μ.

解　由于方程无实根，所以$4-X<0$，于是有

$$P\{4-X<0\}=P\{X>4\}=0.5$$

$$p\{x>4\}=1-\Phi((4-\mu)/\sigma)=\Phi((\mu-4)/\sigma)=0.5$$

所以，　$(\mu-4)/\sigma=0$，即，$\mu=4$.

12. 设$X \sim N(2, \sigma^2)$，且$P\{2<X<4\}=0.3$，求$P\{X<0\}$.

解　由已知，$P\{2<X<4\}=\Phi(2/\sigma)-\Phi(0)=0.3$

所以，$\Phi(2/\sigma)=0.8$.

$$P\{X<0\}=\Phi(-2/\sigma)=1-\Phi(2/\sigma)=0.2.$$

13.设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着σ增大，$P\{|X-\mu|<\sigma\}$必然[ ].

(A) 单调增大;(B) 单调减小; (C) 保持不变;(D) 增减不定.

解 由于$p\{|X-\mu|<\sigma\}=P\{|X-\mu|/\sigma<1\}=2\Phi(1)-1$

所以，应选(C).

14. 随机变量$X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$，且$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则正确的是[ ].

(A) $\sigma_1<\sigma_2$; (B) $\sigma_1>\sigma_2$; (C) $\mu_1<\mu_2$; (D) $\mu_1>\mu_2$.

解 $p\{|X-\mu_1|<1\}=P\{|X-\mu_1|/\sigma_1<1/\sigma_1\}=2\Phi(1/\sigma_1)-1$

$p\{|Y-\mu_2|<1\}=P\{|Y-\mu_2|/\sigma_2<1/\sigma_2\}=2\Phi(1/\sigma_2)-1$

所以，$\Phi(1/\sigma_1)>\Phi(1/\sigma_2)$，故，$\sigma_1<\sigma_2$，即应选(A).

15. 某机器生产的螺栓的长度(cm)服从参数为$\mu=10.05$，$\sigma=0.06$的正态分布，规定长度在范围10.05 ± 0.12内为合格品，求一只螺栓为不合格品的概率.

解 $P\{|X-10.05|>0.12\}=P\{|X-10.05|/0.06>2\}$

$=2-2\Phi(2)=0.0456$

16. 设$X\sim N(160,\sigma^2)$，若$P\{120<X<200\}\geqslant0.8$，求$\sigma$.

解 $P\{120<X<200\}=P\{|X-160|/\sigma<40/\sigma\}$

$=2\Phi(40/\sigma)-1\geqslant0.8.$

所以，$\Phi(40/\sigma)\geqslant0.9.$

查表得：$40/\sigma\geqslant1.29$. 即$\sigma\leqslant31.008$.

第二章章末习题2(第72页)

6. 已知随机变量X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1 \\ 0\ , & 其它\end{cases}$，现对X进行n次独立的重复观测，并以$V_n$表示观测值不大于0.1的次数，求$V_n$的概率分布.

解　由于$P\{X<0.1\}=\int_{-\infty}^{0.1} f(x)dx=\int_{0}^{0.1} 2xdx=0.01$

所以，$V_n \sim B(n, 0.01)$，故，V_n的分布律为：

$$P\{V_n=k\}=C_n^k\times 0.01^k\times 0.99^{n-k},\ k=0, 1, 2, \ldots, n$$

11. 设X是区间(0,1)中的随机数，试确定满足条件$0<a<1$的数a，使得随机抽取且可以重复的4个数的数值中至少有一个超过a的概率为0.9.

解　由于$P\{X>a\}=P\{a<X<1\}=1-a.$

记Y为4个数中超过a的个数，则$Y\sim B(4,1-a)$

$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-a^4=0.9$

所以，$a=0.1^{1/4}\approx 0.5623$

13. 某军事掩体的高度是按战士与掩体门顶撞头的概率在0.01以下设计的. 设战士身高服从$\mu=165\text{cm}$, $\sigma=5\text{cm}$的正态分布，试确定掩体门的高度。

解 设门的高度为H，战士身高为X，由已知有:

$$P\{X\geqslant H\}=1-\Phi((H-165)/5)\leqslant 0.01$$

所以，$\Phi((H-165)/5)\geqslant 0.99$

于是，$(H-165)/5)\geqslant 2.33$

即，$H\geqslant 176.65\text{cm}$

14. 设$X \sim N(\mu, 36)$, $Y \sim N(\mu, 64)$, 记$p_1 = P\{X \leqslant \mu - 6\}$, $p_2 = P\{Y \geqslant \mu + 8\}$, 则对任何实数$\mu$都有[　　].

(A) $p_1 = p_2$; (B) $p_1 > p_2$; (C) $p_1 < p_2$; (D) $p_1 \neq p_2$.

解 $P\{X \leqslant \mu - 6\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$, $P\{Y \geqslant \mu + 8\} = 1 - \Phi(1)$

所以，$p_1 = p_2$. 故应选(A).

15. 设$X \sim N(0, 1)$, 对给定的$\alpha \in (0, 1)$数u_α满足$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若$P\{|X| < x\} = \alpha$，则$x$等于[　　].

(A) $u_{\alpha/2}$; (B) $u_{1-\alpha/2}$; (C) $u_{(1-\alpha)/2}$; (D) $u_{1-\alpha}$.

解 $P\{|X| < x\} = 1 - P\{X < -x\} - P\{X > x\} = 1 - 2P\{X > x\}$

所以，$P\{X > x\} = (1 - \alpha)/2$.

于是，$x = u_{(1-\alpha)/2}$. 故，应选(C).

第二章习题2.4(第65页)

1. 写出分布函数的定义式以及离散与连续两种类型随机变量的分布函数计算公式.

解 定义式为: $F(x)=P\{X\leqslant x\}$.

离散型随机变量: $F(x)=\sum_{x_i\leq x} P\{X=x_i\}=\sum_{x_i\leq x} p_i$

连续型随机变量: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

2. 写出习题2.2第3题中随机变量的分布函数.

解 由于X的分布律为：$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4/7 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix}$

$x<1$时，$F(x)=0$;

$1\leqslant x<2$时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=1\}=4/7$;

$2\leqslant x<3$时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=6/7$;

$x\geqslant 3$时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=1$.

即

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 4/7, & 1\le x<2 \\ 6/7, & 2\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$$

4. 设随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<A\\ 0, & 其它\end{cases}$，求

(1) 常数A; (2) X的分布函数.

解 (1) 由于 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{A} 2xdx=A^2=1$, 所以A=1.

(2) $x<0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=0$

$0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{0}^{x} 2xdx=x^2$

$x>1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{1} 2xdx=1$

即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

7. 求与密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.5e^x, & x<0\\ 0.25, & 0\le x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$ 对应的分布函数.

解 x<0时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}0.5e^x dx=0.5e^x$

$0\leqslant x<2$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0.5e^x dx+\int_{0}^{x}0.25dx$

$=0.5+0.25x$

$x\geqslant 2$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0.5e^x dx+\int_{0}^{2}0.25dx=1$

所以, $F(x)=\begin{cases}0.5e^x, & x<0\\ 0.5+0.25x, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

8. 随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-x^2/2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

(1) 求常数A, B; (2) 求$P\{-\sqrt{2}<X<\sqrt{2}\}$; (3) X是连续型随机变量吗? 如果是则求X的密度函数.

解 (1) 由于，$F(+\infty)=1$, 所以$A=1$.

又由$F(0+)=F(0)$得$B=-1$.

(2) $P\{-\sqrt{2}<X<\sqrt{2}\}=F(\sqrt{2})-F(-\sqrt{2})=1-e^{-1}$

(3) 由于F(x)是连续的, 所以X是连续型随机变量.

X的密度函数为:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

11. 设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为随机变量X_1与X_2的分布函数，为使$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取[　　].

(A) $a=3/5, b=-2/5$;　　(B) $a=2/3$, $b=2/3$;

(C) $a=-1/2$, $b=3/2$;　　(D) $a=3/2$, $b=-3/2$.

解　由于(B)中有$F(+\infty)=0$, (D)中有$F(+\infty)=3$, (C)中有$F(x)\leqslant 0$. 所以，只能选(A).

实际上，(A)中的$F(x)$满足：$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，单调不减，右连续，且$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$. 所以$F(x)$是分布函数.

12. 设随机变量X的密度函数为$\varphi(x)$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$, $F(x)$是X的分布函数, 则对任意实数a, 下列选项正确的是[　　].

(A) $F(-a)=1-\int_0^a \varphi(x)dx$; (B) $F(-a)=1/2-\int_0^a \varphi(x)dx$;

(C) $F(-a)=F(a)$; (D) $F(-a)=2F(a)-1$.

解 由于

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx \overset{x=-t}{=} -\int_{+\infty}^{a}\varphi(-t)dt=\int_{a}^{+\infty}\varphi(t)dt$$

$$=P\{X>a\}=1-P\{X\leqslant a\}=1-F(a)$$

可见, (C), (D)都不对. 取a=0可得: $F(0)=1/2$. 于是,

$$1/2=\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx+\int_{-a}^{0}\varphi(x)dx=F(-a)+\int_{0}^{a}\varphi(x)dx$$

所以, 应选(B).

13. 设X_1和X_2是任意两个连续型随机变量，它们的密度函数分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$，则下列选项正确的是[　　　].

(A) $f_1(x)+f_2(x)$必为某一随机变量的密度函数;

(B) $f_1(x)\ f_2(x)$必为某一随机变量的密度函数;

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数;

(D) $F_1(x)\ F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数;

解 (D)中的$F(x)=F_1\ F_2$满足: $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，单调不减，右连续，且$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$. 所以$F(x)$是分布函数. 选D.

(A)中有$\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(x)+f_2(x))dx=2$, (C)中$F_1(\infty)+F_2(\infty)=2$.

(B)中若取$X_1\sim U(0,1)$, $X_2\sim U(2,3)$, 则$f_1(x)f_2(x)=0$.

第二章章末习题2(第72页)

18. 设X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} A & , \quad x\le 0 \\ Bx^2 & , \quad 0<x\le 1 \\ Cx-x^2/2-1, & 1<x\le 2 \\ 1 & , \quad x>2 \end{cases}$,

(1) 求常数A, B, C; (2) 求P{X>1/2}; (3) X是连续型随机变量吗？若是则求X的密度函数.

解 (1) 由$F(-\infty)=0$得A=0, 由$F(2^+)=F(2)$得C=2, 再由$F(1^+)=F(1)$得B=1/2.

(2) P{X>1/2}=1−F(1/2)=1−1/8=7/8.

由于F(x)是连续函数, 所以X是连续型随机变量, 密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

19. 设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ cx^3, & 0\le x<3, \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$

若$P\{X=3\}=0.1$，求常数c. 这时X是连续型随机变量吗？说明理由.

解 由于$P\{X=3\}=F(3)-F(3^-)=1-27c=0.1$

所以，$c=1/30$.

X不是连续型随机变量. 下列任何理由都可说明:

$F(x)$在$x=3$处不连续，

$P\{X=3\}=0.1\neq 0$.

习题2.5(第58页)

1. 已知随机变量X的概率分布为

X	−1	0	1	1.5
P	0.1	0.2	0.3	0.4

求随机变量$Y=2X-1$和$Z=X^2$的分布律.

解 Y和Z的分布律分别为:

Y	−3	−1	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

Z	0	1	2.25
P	0.2	0.4	0.4

3. 设X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，求Y=2X,Z=−X+1和U=$X^2$的密度函数.

解　对任意0<x<2，有

$$F_Y(x)=P\{Y\leqslant x\}=P\{X\leqslant x/2\}=\int_{-\infty}^{x/2} f(t)dt=\int_0^{x/2} 2tdt=\frac{x^2}{4}$$

所以，$f_Y(x)=F'_Y(x)=x/2$. 即Y的密度函数为：

$$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

对任意0<x<1，有

$$F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{X\geqslant 1-x\}=\int_{1-x}^{1} 2tdt=1-(1-x)^2$$

所以，$f_Z(x)=F'_Z(x)=2(1-x)$. 即Z的密度为：

$$f_Z(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0\ , & 其它\end{cases}$$

对任意 $0<x<1$，有

$$F_U(x)=P\{U\leqslant x\}=P\{-x^{1/2}\leqslant X\leqslant x^{1/2}\}=\int_0^{\sqrt{x}}2t\,dt=x$$

所以，$f_U(x)=F'_U(x)=1$. 即U的密度函数为：

$$f_U(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

5. (1) 设X～f(x)，求$Y=X^3$的密度函数；(2) 设X～E(λ)，求$Y=X^3$的密度函数；(3) 设X～E(1)，求$Y=e^X$的密度函数.

解 (1) $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=p\{X^3\leqslant y\}=P\{X\leqslant y^{1/3}\}$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f(x)dx$$

所以，Y的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}f(\sqrt[3]{y}), & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

(2) 由(1)得，Y的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{3\sqrt[3]{y^2}}e^{-\lambda\sqrt[3]{y}}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

(3) 对任意$y \geqslant 1$有

$$F_Y(y)=P\{Y \leqslant y\}=p\{e^X \leqslant y\}=P\{X \leqslant \ln y\}$$

$$=\int_0^{\ln y} e^{-x}dx = 1-\frac{1}{y}$$

所以，$F'_Y(y)=1/y^2$，于是Y的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & y \geq 1 \\ 0, & y<1 \end{cases}$$

6. 设X~U(0, 1)，求：(1)Y=3X+1的密度函数；(2) Y=−2lnX的密度函数；(3) Y=e^X的密度函数.

解 (1) 对任意1<y<4有：

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=p\{3X+1\leqslant y\}=P\{X\leqslant (y-1)/3\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} f_X(x)dx=\int_0^{\frac{y-1}{3}} 1dx=\frac{y-1}{3}$$

所以，Y的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1<y<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ Y~U(1, 4).

(2) 对任意y>0，有

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=p\{-2\ln X\leqslant y\}=P\{X\geqslant e^{-y/2}\}$$

$$=\int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{1} 1dx=1-e^{-\frac{y}{2}}$$

所以，Y的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$　　Y~E(1/2).

(3) 对任意$1<y<e$，有

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=p\{e^X\leqslant y\}=P\{X\leqslant \ln y\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx=\int_0^{\ln y}1dx=\ln y$$

所以，Y的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & 其它\end{cases}$

10. 设X~U(－1, 2)，随机变量Y= $\begin{cases} 1, & X>0 \\ 0, & X=0 \\ -1, & X<0 \end{cases}$，试求随机变量Y的分布律.

解 Y只能取－1, 0, 1三个值, Y的分布律为:

$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=P\{-1<X<0\}=1/3,$

$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0,$

$P\{Y=1\}=p\{X>0\}=P\{0<X<2\}=2/3.$

或写成:

Y	－1	0	1
P	1/3	0	2/3

11. 假设由自动线加工的某种零件的内径(单位mm)服从正态分布N(11, 1), 内径小于10或大于12的为不合格品, 其余为合格品, 销售每件合格品获利, 销售每件不合格品则亏损. 已知销售利润Y(单位:元)与销售零件的内径X有关系:

$$Y=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X\le 12\\ -5, & X>12\end{cases}$$

求Y的分布律.

解 Y只能取－5, －1, 20三个值, Y的分布律为:

$$P\{Y=-5\}=p\{X>12\}=1-\Phi(1)=0.1587$$

$$P\{Y=-1\}=P\{X<10\}=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=0.1587$$

$$P\{Y=20\}=P\{10\leqslant X\leqslant 12\}=2\Phi(1)-1=0.6826$$

第二章章末习题2(第72页)

20. 已知随机变量X的分布律为:

X	-2	0	1	1.5	3
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

求$X+2$, $-X+1$与X^2的分布律.

解 分布律分别为:

$X+2$	0	2	3	3.5	5
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

$-X+1$	-2	-0.5	0	1	3
P	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

X^2	0	1	2.25	4	9
P	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

21. 设随机变量$X \sim E(2)$，证明：$Y=1-e^{-2X} \sim U(0,1)$.

证明 对任意$0<y<1$，有

$$F_Y(y)=P\{Y \leqslant y\}=P\{1-e^{-2X} \leqslant y\}=P\{-2X \geqslant \ln(1-y)\}$$

$$=P\{X \leqslant -\ln(1-y)/2\}$$

$$=\int_{-\infty}^{-\frac{\ln(1-y)}{2}} f_X(x)dx=\int_0^{-\frac{\ln(1-y)}{2}} 2e^{-2x}dx=1-(1-y)=y$$

所以，Y的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

即，$Y \sim U(0,1)$.

22. 设随机变量X～$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$，求Y=lnX的密度函数.

解 $F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\ln X\leqslant y\}=P\{X\leqslant e^y\}$

$$=\int_{-\infty}^{e^y} f(x)dx=\int_0^{e^y}\frac{2}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{2}{\pi}\arctan e^y$$

所以，$F'_Y(y)=\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$.

即Y的密度函数为：

$$f_Y(y)=\frac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})},\qquad -\infty<y<+\infty$$

24. 设随机变量$X\sim E(5)$，则随机变量$Y=\min\{X,2\}$的分布函数是[　　].

(A) 连续函数；　　(B) 至少有两个间断点；

(C) 阶跃函数；　　(D) 恰好有一个间断点.

解 由于$X<2$时$Y=X$，$X\geqslant 2$时$Y=2$. 所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-5y}, & 0\leq y<2\\ 1, & y\geq 2\end{cases}$$

可见，$F_Y(y)$不是阶跃函数，也不连续，只有$y=2$一个间断点.

故，应选(D).

第三章习题3.1(第75页)

举出几个你熟悉的能用多维随机变量来描述的社会或生活现象.

例如:

描述某种器件的长度H和重量M;

描述某学生各科考试的成绩X_i;

描述平面上随机点的坐标(X, Y)等等。

第三章习题3.2(第82页)

2. 袋中装有1个红球，2个黑球与3个白球，现从袋中取两次，每次取一个球，以X, Y, Z分别表示两次取球所取得的红球，黑球与白球的个数. 若每次取出的球(1)立即放回袋中，再取下一个，或者(2)不再放回袋中接着便取下一个，就这两种取球方式，写出(X, Y)的概率分布，求$P\{X=1|Z=0\}$.

解　X, Y, Z可取0, 1, 2. 且$X+Y+Z=2$

所以，(X, Y)的分布律为:

(1)

(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(2,0)
P	1/4	1/3	1/9	1/6	1/9	1/36

$P\{X=1|Z=0\}$

$=(1/9)/(9/36)$

$=4/9$

(2)

(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)
P	1/5	2/5	1/15	1/5	2/15

$P\{X=1|Z=0\}$

$=(2/15)/(3/15)=2/3$

3. 将一硬币连掷三次，以X表示三次中出现正面的次数，以Y表示三次中出现正面的次数与出现反面的次数之差的绝对值，试写出X和Y的联合分布律。

解 X可取0, 1, 2, 3, Y可取1, 3. 且Y=1对应X=1或X=2, Y=3对应X=0或X=3. 所以, (X,Y)的分布律为:

$$P\{X=0,Y=3\}=P\{X=0\}=1/8$$

$$P\{X=3,Y=3\}=P\{X=3\}=1/8$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}=3/8$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}=3/8$$

或写成:

(X,Y)	(0,3)	(1,1)	(2,1)	(3,3)
P	1/8	3/8	3/8	1/8

5. 一射手射击命中目标的概率为$p(0<p<1)$，射击进行到击中目标两次为止，设以X表示第一次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的联合分布律.

解 X, Y可取$0, 1, 2, \ldots$，且$X<Y$，所以，(X,Y)的分布律为:

$$P\{X=i,Y=j\}=p^2(1-p)^{j-2},\quad i=1,2,\ldots,\ j=i+1,i+2,\ldots$$

7. 设随机变量U在区间[−2, 2]上服从均匀分布, 且

$$X=\begin{cases}-1, & U\le -1\\ 1\ , & U>-1\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & U\le 1\\ 1\ , & U>1\end{cases}$$

求X和Y的联合概率分布.

解 X, Y可取−1, 1, 所以, (X,Y)的分布律为:

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1\}=1/4$

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1$ 且 $U>1\}=0$

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{-1<U\leqslant 1\}=1/2$

$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>1\}=1/4$

X \ Y	−1	1
−1	1/4	0
1	1/2	1/4

或写成:

(X,Y)	(−1, −1)	(1, −1)	(1,1)
P	1/4	1/2	1/4

9. 已知随机变量X_1, X_2的分布律为:

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

且$P\{X_1X_2=0\}=1$, 求X_1和X_2的联合概率分布.

解 由于$P\{X_1X_2=0\}=1$, 所以

$$P\{X_1=-1, X_2=1\}=P\{X_1=1, X_2=1\}=0$$

又由于, $P\{X_1=-1\}=P\{X_1=-1,X_2=0\}+P\{X_1=-1,X_2=1\}$

所以, $P\{X_1=-1, X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=1/4$

同理, $P\{X_1=1, X_2=0\}=P\{X_1=1\}=1/4$

$P\{X_1=0, X_2=1\}=P\{X_2=1\}=1/2$

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1
0	$1/4$	0	$1/4$
1	0	$1/2$	0

$P\{X_1=0, X_2=0\}=P\{X_2=0\}-P\{X_1=0,X_2=1\}=0$, 即

11. 已知随机变量X服从参数为p=0.6的0－1分布，且在X=0, X=1条件下随机变量Y的条件分布律为：

$Y\|X=0$	1	2	3
P	1/4	1/2	1/4

$Y\|X=1$	1	2	3
P	1/2	1/6	1/3

求(X, Y)的分布律.

解 由于$P\{X=0\}=0.4$，$P\{X=1\}=0.6$，所以

$$P\{X=0,Y=j\}=P\{Y=j|X=0\}P\{X=0\}=0.4P\{Y=j|X=0\}$$

$$P\{X=1,Y=j\}=P\{Y=j|X=1\}P\{X=1\}=0.6P\{Y=j|X=1\}$$

所以，(X, Y)的分布律为：

X \ Y	1	2	3
0	1/10	1/5	1/10
1	3/10	1/10	1/5

第三章章末习题3(第110页)

3. 设随机变量X与Y的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
-1	$2/25$	a	$1/25$
1	b	$3/25$	$2/25$

且$P\{Y=1|X=0\}=3/5$，求常数a, b的值.

解 由于$P\{Y=1|X=0\}=P\{X=0,Y=1\}/P\{X=0\}$

$$=b/(2/25+b)=3/5$$

所以，$b=3/25$.

又由于$\sum p_{ij}=1$，所以，$a=14/25$.

即，$a=14/25$，$b=3/25$.

7. 设二维离散型随机变量(X, Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3	4
−1	0.20	0.03	0.21	0.10
0	0	0.08	0.11	0.09
1	0.07	0.11	0	0

求:(1)边缘分布律; (2)在X=−1, Y=2条件下的条件分布律;

(3) $P\{X\neq Y\}$, $P\{X\leqslant 0\}$.

解 (1) (X, Y)的边缘分布律分别为:

X	-1	0	1
P	0.54	0.28	0.18

Y	1	2	3	4
P	0.27	0.22	0.32	0.19

X \ Y	1	2	3	4
−1	0.20	0.03	0.21	0.10
0	0	0.08	0.11	0.09
1	0.07	0.11	0	0

X	-1	0	1
P	0.54	0.28	0.18

Y	1	2	3	4
P	0.27	0.22	0.32	0.19

(2) 在X=−1, Y=2条件下的条件分布律分别为:

$Y\mid X=-1$	1	2	3	4
P	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{5}{27}$

$X\mid Y=2$	-1	0	1
P	$\frac{3}{22}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{2}$

(3) $P\{X\neq Y\}=1-P\{X=Y\}=1-0.07=0.93$

$P\{X\leqslant 0\}=1-P\{X>0\}=1-P\{X=1\}=1-0.18=0.82$

8. 设X, Y为两个随机变量，且$P\{X\geqslant 0, Y\geqslant 0\}=3/7$, $P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=4/7$，求$P\{\max(X, Y)\geqslant 0\}$.

解 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=P\{X\geqslant 0 \text{或} Y\geqslant 0\}$

$=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0, Y\geqslant 0\}$

$=4/7+4/7-3/7=5/7$

第三章习题3.3(第92页)

1. 设随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^2y, & x^2<y<1 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1) 常数a; (2) P{X>0.5}, P{Y>0.5}.

解 (1) 由于

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=a\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2ydy=\frac{a}{2}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^4)dx=\frac{4a}{21}$$

所以, a=21/4.

(2) $P\{X>0.5\}=\dfrac{21}{4}\displaystyle\int_{0.5}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2ydy=0.3936$

$P\{Y>0.5\}=\dfrac{21}{4}\displaystyle\int_{0.5}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2ydx=0.9116$

3. 设随机变量(X, Y)～$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$,

求: (1) 常数c; (2) P{X≤1|Y≤1}.

解 (1) 由于

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = c\int_0^{+\infty} dx\int_0^x e^{-x}dy = c\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = c$$

所以，c=1.

(2) $P\{X\leqslant 1, Y\leqslant 1\}=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-x}dy=\int_0^1 xe^{-x}dx=1-2e^{-1}$

$P\{Y\leqslant 1\}=\int_0^1 dy\int_y^{+\infty} e^{-x}dx=\int_0^1 e^{-y}dy=1-e^{-1}$

$P\{X\leqslant 1 | Y\leqslant 1\}=\dfrac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}=\dfrac{e-2}{e-1}\approx 0.418$

5. 设二维随机变量(X,Y)在平面区域D上服从均匀分布，其中区域D由曲线y=1/x及直线y=0, x=1, x=e^2围成，写出(X,Y)的密度函数，并求(X, Y)关于X的边缘密度函数在x=2的值.

解 由于区域D的面积为 $A=\int_1^{e^2} 1/x dx = \ln x|_1^{e^2} = 2$

所以，(X, Y)的密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} 1/2, & x\in D \\ 0 \ , & x\notin D \end{cases}$

(X, Y)关于X的边缘密度函数为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} 1/(2x), & 1<x<e^2 \\ 0 \ , & \text{其它} \end{cases}$$

所以，$f_X(2)=1/4$. 或 $f_X(2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(2,y)dy=\int_0^{1/2} 1/2 dy = 1/4$

6. 设随机变量(X,Y)在区域D上服从均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线y=2x+1围成的三角形区域，求条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$.

解 由于区域D的面积为A=1/4. 所以(X,Y)的密度函数:

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & x\in D\\ 0, & x\notin D\end{cases}$$

(X, Y)关于X的边缘密度函数为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{2x+1}4dy=\begin{cases}8x+4, & -1/2<x<0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以，对任意 −1/2<x<0，条件密度函数为:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+1}, & 0<y<2x+1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

第三章章末习题3(第110页)

1. 设随机变量(X, Y)在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$且$y\geqslant 0\}$内服从均匀分布，在三次重复独立观察中事件$\{X\geqslant Y\}$出现的次数为Z，试求$P\{Z=2\}$.

解 由于D的面积为$\pi/2$，所以，(X,Y)的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\pi/2, & (x,y)\in D\\ 0\quad, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$p=P\{X\geqslant Y\}=\iint\limits_{x\geq y} f(x,y)dxdy=1/4$$

所以，$Z\sim B(3,p)$，因此，

$$P\{Z=2\}=C_3{}^2p^2(1-p)=3\times(1/16)\times(3/4)=9/64$$

11. 已知随机变量(X,Y)的密度函数$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$，求(X,Y)的边缘密度函数和条件密度函数.

解 (X,Y)的边缘密度函数为：$(X,Y)\sim N(0,0,\frac{5}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{5}})$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{2x^2}{5}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{5(y+x/5)^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}\pi}e^{-\frac{2x^2}{5}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-\frac{2x^2}{5}}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\pi}e^{-2y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-2y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}$$

可见，X~N(0, 5/4)，Y~N(0, 1/4).

所以，对任意的y和x，条件密度函数为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\sqrt{\frac{5}{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{5}x^2+2xy+5y^2)}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2\pi}}e^{-\frac{(x+5y)^2}{10}},\quad -\infty<y<+\infty$$

可见，X|Y=y~N(-y, 1)，Y|X=x~N(-x/5, 5).

第三章习题3.4(第96页)

1. 对习题3.2的第1题, 求随机变量(X, Y)的分布函数.

解 由习题3.2第1题知, (X, Y)的分布律为:

有放回:

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
P	$1/9$	$2/9$	$2/9$	$4/9$

无放回:

(X,Y)	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

所以, 分布函数分别为:

有放回:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & X<1, \text{或} Y<1 \\ 1/9, & 1\leqslant X<2, 1\leqslant Y<2 \\ 1/3, & 1\leqslant X<2, Y\geqslant 2, \text{或} X\geqslant 2, 1\leqslant Y<2 \\ 1, & X\geqslant 2, Y\geqslant 2 \end{cases}$$

1. 对习题3.2的第1题，求随机变量(X, Y)的分布函数.

解 由习题3.2第1题知，(X, Y)的分布律为：

有放回：

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
P	$1/9$	$2/9$	$2/9$	$4/9$

无放回：

(X,Y)	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

无放回：

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<1, \text{或} y<1, \text{或} x<2,\ y<2 \\ 1/3, & 1\leqslant x<2, y\geqslant 2,\ \text{或} x\geqslant 2, 1\leqslant Y<2 \\ 1, & x\geqslant 2, y\geqslant 2 \end{cases}$$

2. 对习题3.3的第3题，求随机变量(X, Y)的分布函数.

解 由习题3.3第3题知，(X, Y)的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以，x≤0或y≤0时有F(x,y)=0； x>0, y≥x时有：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv=\int_{0}^{x}\int_{0}^{u} e^{-u}dvdu=1-e^{-x}-xe^{-x}$$

x>0, 0<y<x时, $F(x,y)=\int_{0}^{y}\int_{v}^{x} e^{-u}dudv=1-e^{-y}-ye^{-x}$

所以，(X,Y)的分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } y\leqslant 0 \\ 1-e^{-x}-xe^{-x}, & x>0,\ y\geqslant x \\ 1-e^{-y}-ye^{-x}, & x>0,\ 0<y<x \end{cases}$$

4. 已知连续型随机变量X, Y的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求:(1)(X,Y)的边缘分布函数; (2) X,Y皆大于0.1的概率.

解 (1)边缘分布函数为:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

(2) $P\{X>0.1,Y>0.1\}$

$$=1-P\{X\leqslant 0.1\}-P\{Y\leqslant 0.1\}+P\{X\leqslant 0.1,Y\leqslant 0.1\}$$

$$=1-F_X(0.1)-F_Y(0.1)+F(0.1,0.1)=e^{-0.1}$$

5. 设随机变量X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/2, & -1<x<0\\ 1/4, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

而$Y=X^2$, $F(x,y)$为随机变量(X,Y)的分布函数,求$F(-1/2,4)$.

解

$$F(-1/2,4)=P\{X\leqslant -1/2, Y\leqslant 4\}=P\{-2\leqslant X\leqslant -1/2\}$$

$$=\int_{-2}^{-1/2} f_X(x)dx=\int_{-1}^{-1/2} 1/2dx=1/4$$

6. 证明还是$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y>0\\0, & x+y\le 0\end{cases}$不是分布函数.

证明　因为$1=F(0^+,0)=F(0,0^+)\neq F(0,0)=0$

即$F(x,y)$在点$(0,0)$处关于x, y都不是右连续的，所以$F(x,y)$不是分布函数。

1. $0\le F(x,y)\le 1,\quad \forall x\in(-\infty,+\infty),\ y\in(-\infty,+\infty)$;

2. $F(x,y)$对每个变量都是非减函数;

3. $\forall x\in(-\infty,+\infty)$有$F(x,-\infty)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=0,$

   $\forall y\in(-\infty,+\infty)$有$F(-\infty,y)=0,\ F(+\infty,+\infty)=1.$

4. $F(x,y)$关于x和y都右连续，即：

   $F(x^+,y)=F(x,y),\ F(x,y^+)=F(x,y)$

第三章章末习题3(第110页)

2.

解　由于D的面积为π/2，所以，(X,Y)的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\pi/2, & (x,y)\in D\\ 0\quad , & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$p=P\{X\geqslant Y\}=\iint\limits_{x\geq y} f(x,y)dxdy=1/4$$

所以，Z~B(3, p)，因此，

$$P\{Z=2\}=C_3^2p^2(1-p)=3\times(1/16)\times(3/4)=9/64$$

第三章习题3.5(第100页)

3. 随机变量X, Y相互独立, X, Y的分布律为:

X	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Y	-2	2
P	$1/2$	$1/2$

写出(X,Y)的分布律, 并求$P\{X+Y=1\}$和$P\{XY=0\}$.

解 因为X, Y相互独立, 所以(X, Y)的分布律为:

$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}=1/6,\ i=-1,0,1,\ j=-2,2.$

$P\{X+Y=1\}=P\{X=-1,\ Y=2\}=1/6.$

$P\{XY=0\}=P\{X=0,Y=-2\}+P\{X=0,\ Y=2\}=1/3.$

4. 设随机变量X, Y相互独立且有相同的分布, X的分布律为:

X	1	2
P	2/3	1/3

记$U=\max\{X, Y\}$, $V=\min\{X, Y\}$, 求(U, V)的分布律.

解 显然U, V只能取1, 2, 且$U\geqslant V$, (U, V)的分布律为:

$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=4/9,$

$P\{U=2,V=1\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}+P\{X=2\}P\{Y=1\}=4/9,$

$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\}=1/9,$

或写成:

(U,V)	(1,1)	(2,1)	(2,2)
P	4/9	4/9	1/9

$U\backslash V$	1	2
1	4/9	0
2	4/9	1/9

5. 下表列出了随机变量X, Y的联合分布律和边缘分布律中的部分数值，如果X与Y相互独立，试在表中的空白处填上其余数值.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	P_X
x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
P_Y	1/6	1/2	1/3	1

解 由边缘分布的概念有：

又由于X,Y相互独立， 所以

7. 设随机变量X, Y的概率分布为:

$X\setminus Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

且事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立, 求常数a, b.

解 由于事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立, 所以$\{X=0\}$与$\{X+Y\neq\}$也相互独立. 又由于

$$P\{X=0\}=0.4+a,\ P\{X+Y=1\}=a+b,\ P\{X+Y\neq 1\}=0.5$$

$$P\{X=0\text{且}X+Y=1\}=a,\ P\{X=0, X+Y\neq 1\}=0.4$$

所以, $(0.4+a)(a+b)=a$, $(0.4+a)\times 0.5=0.4$

因此, $a=0.4$, $b=0.1$.

也可以由$\{X\neq 0\}$与$\{X+Y\neq 1\}$独立得: $(b+0.1)\times 0.5=0.1$

8. 已知随机变量X和Y的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求X和Y的联合分布函数F(x, y)及P{0<X<0.5, 0<Y <0.5}.

解 易得：$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

所以，X和Y相互独立，所以

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)=\begin{cases}x^2y^2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ x^2, & 0\le x\le 1, y>1\\ y^2, & x>1, 0\le y\le 1\\ 1, & x>1, y>1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$P=[F_X(0.5)-F_X(0)][F_Y(0.5)-F_Y(0)]=0.0625$$

也可以不用独立性，直接按定义计算：

$x<0$ 或 $y<0$ 时，由于 $f(x, y)=0$，所以 $F(x,y)=0$；

$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 4uvdvdu=x^2y^2$$

$0\leqslant x\leqslant 1, y>1$ 时，$F(x,y)=\int_{0}^{x}\int_{0}^{1} 4uvdvdu=x^2$

$x>1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$F(x,y)=\int_{0}^{1}\int_{0}^{y} 4uvdvdu=y^2$

$X>1, y>1$ 时，$F(x,y)=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} 4uvdvdu=1$

$$P\{0<X<0.5, 0<Y<0.5\}=\int_{0}^{0.5}\int_{0}^{0.5} 4xydxdy=0.0625$$

12. 设随机变量X和Y相互独立，X～U(0, 0.2)，Y～E(5)，(1) 写成(X, Y)的密度函数；(2) 求P{Y<X}.

解 (1) 由已知：$f_X(x)=\begin{cases}5, & 0<x<0.2\\ 0, & 其它\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

又由于 X和Y相互独立，所以(X, Y)的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}25e^{-5y}, & 0<x<0.2, y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(2) $P\{Y<X\}=P\{0<Y<X<0.2\}$

$$=\int_0^{0.2}dx\int_0^x 25e^{-5y}dy=\int_0^{0.2}5(1-e^{-5x})dx$$

$$=1-(1-e^{-1})=e^{-1}.$$

第三章章末习题3(第110页)

5. 设随机变量(X,Y)的分布律为

(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
P	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

且X与Y相互独立，求常数a与b的值.

解　由于$P\{X=1\}=1/3$，$P\{X=2\}=1/3+a+b$

$P\{Y=1\}=1/2$, $P\{Y=2\}=1/9+a$，$P\{Y=3\}=1/18+b$

所以，由$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}$得：$a=2/9$

由$P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=3\}$得，$b=1/9$.

$a=2/9$, $b=1/9$时可以验证$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}$对所有$i=1, 2$, $j=1, 2, 3$都成立，所以X, Y相互独立。

9. 一个商店每周四进货，以备星期五、六、日销售. 根据多周统计，这三天的销售件数X_1, X_2, X_3彼此独立，且有如下的分布律：

X_1	10	11	12
P	0.2	0.7	0.1

，

X_2	13	14	15
P	0.3	0.6	0.1

，

X_3	17	18	19
P	0.1	0.8	0.1

问三天的销售总量这个随机变量可以取哪些值？进货45件不够卖的概率多大？进货40件够卖的概率又多大？

解　三天销售总量随机变量可取40, 41, 42, …, 46.

$$P\{X_1+X_2+X_3>45\}=P\{X_1=12\}P\{X_2=15\}P\{X_3=19\}=0.001.$$

$$P\{X_1+X_2+X_3\leqslant 45\}=P\{X_1=10\}P\{X_2=13\}P\{X_3=17\}=0.006.$$

所以，进货45件不够卖的概率为0.001，进货40件够卖的概率为0.006。

12. 设随机变量(X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+xy/3, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1) P{X+Y⩾1}；(2) 边缘密度函数与条件密度函数；

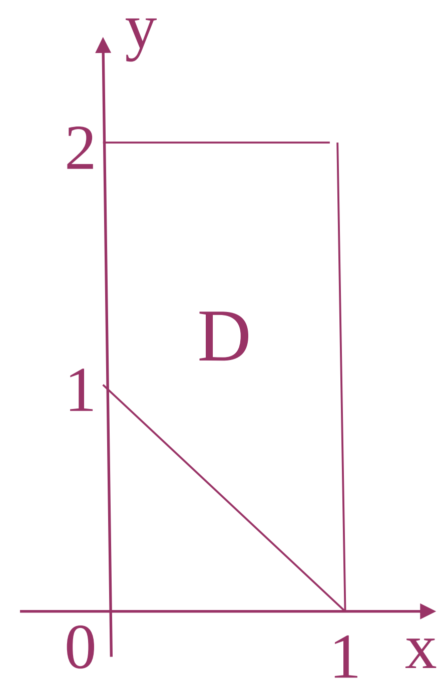
(3) 判断X, Y的独立性.

解 (1) $P\{X+Y\geqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\ge 1} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2 (x^2+\frac{xy}{3})dy$$

$$=\int_0^1 \{x^2(1+x)+\frac{x}{6}[4-(1-x)^2]\}dx$$

$$=1/3+1/4+1/4+1/9-1/24=65/72$$



(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^2 (x^2+\frac{xy}{3})dy=2x^2+\frac{2}{3}x, 0\le x\le 1$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 (x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}, 0\le y\le 2$

即：$f_X(x)=\begin{cases} 2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{3}+\frac{y}{6}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

对任意$0<x\leqslant 1$，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{3x+y}{6x+2},\quad 0\le y\le 2$$

即，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \frac{3x+y}{6x+2}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

类似地，对任意$0\leqslant y\leqslant 2$有：

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} \frac{6x^2+2xy}{2+y}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(3) 显然有：

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

所以X,Y不独立.

15. 设随机变量X_1,X_2相互独立，$X_1\sim B(n_1,p)$，$X_2\sim B(n_2,p)$，证明$X_1+X_2\sim B(n_1+n_2,p)$.

证明　由已知：$P\{X_1=k\}=C_{n_1}^k p^k(1-p)^{n_1-k},k=0,1,\ldots,n_1$

$$P\{X_2=k\}=C_{n_2}^k p^k(1-p)^{n_2-k},\quad k=0,1,\ldots,n_2$$

所以，X_1+X_2可取$0,1,\ldots,n_1+n_2$，而且

$k\leqslant\min\{n_1,n_2\}$时，

$$P\{X_1+X_2=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X_1=i\}P\{X_2=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^i p^i(1-p)^{n_1-i}C_{n_2}^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n_2-k+i}$$

$$=p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i}=C_{n_1+n_2}^k p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}$$

$n_1 \leqslant k < n_2$时，($n_2 \leqslant k < n_1$ 时完全类似)

$$P\{X_1 + X_2 = k\} = \sum_{i=0}^{n_1} P\{X_1 = i\} P\{X_2 = k - i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} C_{n_1}^{i} p^{i} (1-p)^{n_1 - i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2 - k + i}$$

$$= p^{k} (1-p)^{n_1 + n_2 - k} \sum_{i=0}^{n_1} C_{n_1}^{i} C_{n_2}^{k-i} = C_{n_1+n_2}^{k} p^{k} (1-p)^{n_1 + n_2 - k}$$

$K > \max\{n_1, n_2\}$时，

$$P\{X_1 + X_2 = k\} = \sum_{i=n_2-k}^{n_1} P\{X_1 = i\} P\{X_2 = k - i\}$$

$$= \sum_{i=n_2-k}^{n_1} C_{n_1}^{i} p^{i} (1-p)^{n_1 - i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2 - k + i}$$

$$= p^{k} (1-p)^{n_1 + n_2 - k} \sum_{i=n_2-k}^{n_1} C_{n_1}^{i} C_{n_2}^{k-i} = C_{n_1+n_2}^{k} p^{k} (1-p)^{n_1 + n_2 - k}$$

所以，$X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$.

第三章习题3.6(第108页)

1. 已知随机变量(X, Y)的分布律为:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.3	0.2	0
1	0	0.4	0.1

求$Z=2X-Y$,$U=\min\{X,Y\}$,$V=\max\{X,Y\}$和$W=XY$的分布律.

解 Z, U, V, W的分布律分别为:

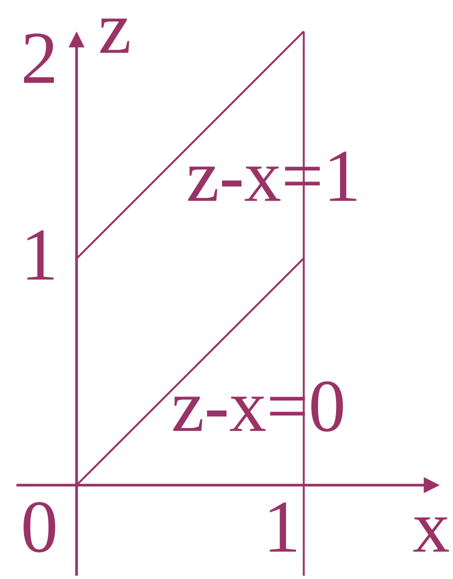
Z	-3	-2	-1	1	2	3
P	0	0.2	0.3	0.1	0.4	0

U	-1	0	1
P	0.5	0.4	0.1

V	-1	0	1
P	0.3	0.2	0.5

W	-1	0	1
P	0	0.6	0.4

4. 设随机变量X与Y相互独立且均服从U(0, 1), 试求Z=X+Y的密度函数.



解 由卷积公式:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

所以, 0<z≤1时, $f_Z(z)=\int_0^z 1dx = z.$

1<z≤2时, $f_Z(z)=\int_{z-1}^{1} 1dx = 2-z.$

所以, Z的密度函数为:

$$f_Z(z)=\begin{cases} z \quad , & 0<z\le 1 \\ 2-z, & 1<z\le 2 \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases}$$

5. 设(X, Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$,

求Z=X−Y的概率密度.

解 $z\leqslant 0$时, $F_Z(z)=0$, $z>0$时有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{z+y}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}(e^{-y}-e^{-y-z})dy=1-e^{-z}$$

所以, Z=X−Y的概率密度为:

$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}, & z>0 \\ 0\ , & z\le 0 \end{cases}$$

6. 设(X, Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$,

求: Z=(X+Y)/2 的密度函数.

解 $z\leqslant 0$ 时, $F_Z(z)=0$, $z>0$ 时有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le 2z\}$$

$$=\int_0^{2z}dy\int_0^{2z-y}e^{-(x+y)}dx=\int_0^{2z}(e^{-y}-e^{-2z})dy=1-e^{-2z}-2ze^{-2z}$$

所以, Z=(X+Y)/2 的密度函数为:

$$f_Z(z)=\begin{cases} 4ze^{-2z}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

7. 若随机变量X, Y相互独立且都服从N(0, 1)，证明：$Z=X^2+Y^2$的密度函数为：$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$.

证明　$z\leq 0$时，$F_Z(z)=0$, $z>0$时有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

$$=-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\sqrt{z}}=1-e^{-\frac{z}{2}}$$

所以，Z的密度函数为：$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

10. 设随机变量X,Y相互独立，X的分布律为P{X=i}=1/3 (i=-1, 0, 1), Y的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，记Z=X+Y,

(1) 求Z的概率分布；(2) 求P{Z≤1/2|X=0}.

解 (1) z<−1时，$F_Z(z)=0$，−1≤z<0时有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=P\{X=-1\}P\{Y\le Z+1\}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}1dy=\frac{z+1}{3}$$

0≤z<1时有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X=-1\}P\{Y\le Z+1\}+P\{X=0\}P\{Y\le Z\}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{1}1dy+\frac{1}{3}\int_0^{z}1dy=\frac{1+z}{3}$$

1≤z<2时有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=P\{X=-1\}P\{Y\le Z+1\}$$

$$+P\{X=0\}P\{Y\le Z\}+P\{X=1\}P\{Y\le Z-1\}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 1dy+\frac{1}{3}\int_0^1 1dy+\frac{1}{3}\int_0^{z-1} 1dy=\frac{z+1}{3}$$

所以，Z的分布函数为：

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & , \quad z<-1\\ (z+1)/3, & -1\le z<2\\ 1 & , \quad z\ge 2\end{cases}$$

所以，Z是连续型随机变量，Z的密度函数为：

$$f_Z(z)=\begin{cases}1/3, & -1\le z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) $P\{Z\leqslant 1/2 \mid X=0\}$

$$=\frac{P\{X=0, Z\leq 1/2\}}{P\{X=0\}}$$

$$=\frac{P\{X=0, Y\leq 1/2\}}{P\{X=0\}}$$

$$=P\{Y\leqslant 1/2\}=1/2$$

或 $P\{Z\leqslant 1/2 \mid X=0\}=P\{Y\leqslant 1/2 \mid X=0\}=P\{Y\leqslant 1/2\}=1/2$

第三章章末习题3(第110页)

16. 设随机变量X和Y的联合分布是正方形$G=\{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 3\}$上的均匀分布，求：(1) (X, Y)的分布函数；(2) 随机变量$U=|X-Y|$的密度函数.

16. 设随机变量X和Y的联合分布是正方形$G=\{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 3\}$上的均匀分布，求：(1) (X, Y)的分布函数；(2) 随机变量$U=|X-Y|$的密度函数.

解 (1) $x<1$，或$y<1$时，$F(x,y)=0$，$1 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 3$时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy=\int_{1}^{x}\int_{1}^{y} 1/4dxdy=\frac{1}{4}(x-1)(y-1)$$

$1 \leqslant x \leqslant 3, y>3$时，$F(x,y)=\int_{1}^{x}\int_{1}^{3} 1/4dxdy=\frac{1}{2}(x-1)$

$x>3, 1 \leqslant y \leqslant 3$时，$F(x,y)=\int_{1}^{3}\int_{1}^{y} 1/4dxdy=\frac{1}{2}(y-1)$

即，$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & , \quad x<1\text{或}y<1 \\ (x-1)(y-1)/4, & 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3 \\ (x-1)/2 & , \quad 1 \le x \le 3, y>3 \\ (y-1)/2 & , \quad x>3, 1 \le y \le 3 \\ 1 & , \quad x>3, y>3 \end{cases}$$

(2) 由于对任意 $u<0$，有 $F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=0$

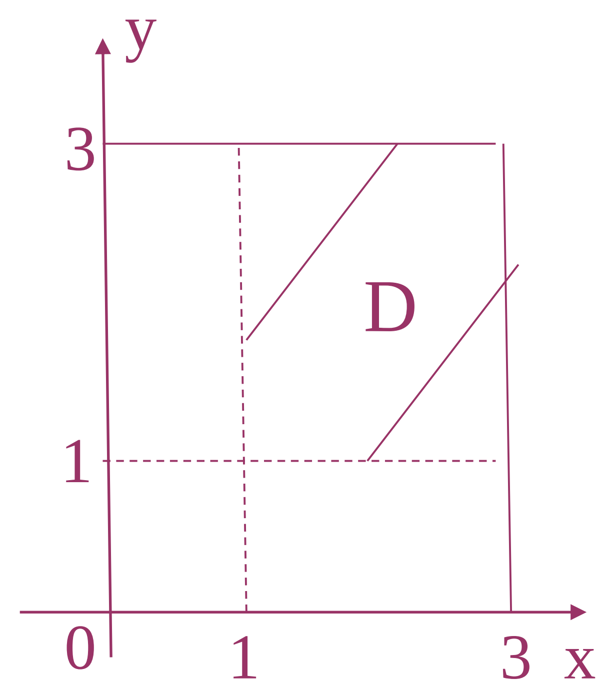
对任意 $u\geqslant 2$，有 $F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{|X-Y|\leqslant u\}=1$，

对任意 $0\leqslant u<2$，有：

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{|X-Y|\leqslant u\}=\iint\limits_{|x-y|\le u} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D} 1/4dxdy$$

$$=\frac{1}{4}[4-(2-u)^2]=u-\frac{u^2}{4}$$



所以，随机变量 U 的密度函数为：

$$f_U(u)=\begin{cases}1-\dfrac{u}{2}, & 0\le u\le 2\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

21.有四个独立工作的元件$R_{ij}(i, j=1, 2)$,它们的寿命(单位: h)都服从参数为λ的指数分布，若R_{11}与R_{12}串联为子系统R_1, R_{21}与R_{22}串联为子系统R_2, 子系统R_1与R_2并联为系统R, R的寿命为Z, 试求Z的寿命分布.

解　由已知有: $R_1=\min\{R_{11}, R_{12}\}$, $R_2=\min\{R_{21},R_{22}\}$, $R=\max\{R_1, R_2\}$, 所以R_1和R_2独立同分布, 密度函数为:

$$f(t)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda t}, & \lambda>0\\ 0 & , \lambda\le 0\end{cases}$$

所以, Z的分布函数和密度函数分别为:

$$F_Z(z)=\begin{cases}(1-e^{-2\lambda z})^2, & \lambda>0\\ 0 & , \lambda\le 0\end{cases}\qquad f_Z(z)=\begin{cases}4\lambda e^{-2\lambda z}(1-e^{-2\lambda z}), & \lambda>0\\ 0 & , \lambda\le 0\end{cases}$$

22. 设$X_1, X_2, \ldots, X_5$相互独立且均服从正态分布$N(12, 5)$，试求$P\{\Sigma X_i > 65\}$.

解　由已知有：$\Sigma X_i \sim N(60, 25)$，所以

$$P\{\sum_{i=1}^{5} X_i > 65\} = P\{\frac{\sum_{i=1}^{5} X_i - 60}{5} > 1\} = 1 - \Phi(1) = 0.1587$$

第四章习题4.1(第122页)

1. (1) 在下列句子中随机地取一单词，以X表示取到的单词所包含的字母的个数，写出X的分布律并求E(X).

"THE GIRL PUT ON HER BEAUTIFUL RED HAT"

(2) 在上述句子的30个字母中随机地取一字母，以Y表示取到的字母所在的单词所包含的字母数，写出Y的分布律并求E(Y).

解 (1) X的分布律为

k	2	3	4	9
$P\{X=k\}$	1/8	5/8	1/8	1/8

$E(X)=2\times1/8+3\times5/8+4\times1/8+9\times1/8=15/4=3.75$

(2) Y的分布律为

k	2	3	4	9
$P\{X=k\}$	1/15	1/2	2/15	3/10

$E(Y)=2\times1/15+3\times1/2+4\times2/15+9\times3/10=73/15=4.867$

3. 设随机变量X的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求E(X), E(X²), E(3X²+5) .

解 $E(X)=-2\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$

$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=17\times0.4+5\times0.3+17\times0.3=13.4$

5. 一批零件中有9个合格品和3个废品，安装机器时，从这批零件中任取一个，如果取出的是废品就不再放回去，求在取出合格品前已取出的废品数的数学期望.

解 记X＝“取出合格品前已取出的废品数”，则X只取0, 1, 2, 3四个值，其分布律为：

X	0	1	2	3
P	$3/4$	$9/44$	$9/220$	$1/220$

所以，E(X)=1×9/44+2×9/220+3×1/220=0.3 .

7. 一工厂生产的某种设备的寿命X(单位:年)服从指数分布，其概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，厂方规定，出售的设备若在出售一年之内损坏可予以调换，若工厂出售一台设备盈利100元，调换一台设备厂方需花费300元，求厂方出售一台设备净盈利的数学期望.

解 由于 P{X<1}= $\int_0^1 \frac{1}{4}e^{-x/4}dx = 1-e^{-1/4}$

所以，E(净盈利)=100－300(1－e$^{-1/4}$)≈33.64

9. 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0\ , & x\le 0 \end{cases}$$

求 (1) Y=2X的数学期望; (2) Y=e^{-2X}的数学期望.

解 (1) $E(Y)=\int_0^{\infty} 2xe^{-x}dx=2$

(2) $E(Y)=\int_0^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$

10. 设随机变量(X, Y)的分布律为:

Y \ X	1	2	3
−1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求E(X), E(Y); (2) 设Z=Y/X, 求E(Z); (3) 设$Z=(X-Y)^2$, 求E(Z).

解 (1) $$E(X)=\sum_{i,j} iP\{X=i,Y=j\}$$

$$=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2$$

$$E(Y)=\sum_{i,j} jP\{X=i,Y=j\}=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0$$

(2) $$E(Z)=\sum_{i,j}\frac{j}{i}P\{X=i,Y=j\}=-1/15=-0.0667$$

(3) $$E(Z)=\sum_{i,j}(i-j)^2P\{X=i,Y=j\}=5$$

11. 设随机变量(X, Y)的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0\quad , & \text{其它}\end{cases}$$

求E(X), E(Y), E(XY), E(X^2+Y^2).

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_y^1 12xy^2dxdy$$

$$=\int_0^1 6y^2(1-y^2)dy=2-6/5=4/5=0.8$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_y^1 12y^3dxdy$$

$$=\int_0^1 12y^3(1-y)dy=3-12/5=3/5=0.6$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_y^1 12xy^3dxdy$$

$$=\int_0^1 6y^3(1-y^2)dy=3/2-1=1/2=0.5$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_y^1 12y^2(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^1[4y^2(1-y^3)+12y^4(1-y)]dy$$

$$=4/3-2/3+12/5-2=16/15=1.0667$$

12. 设随机变量X, Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

(1) 求$E(X+Y)$, $E(2X-3Y^2)$; (2) 当X, Y相互独立时，求$E(XY)$.

解 (1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3/4$

$E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=1-3/8=5/8$

(2) $E(XY)=E(X)E(Y)=1/8$

13. 旅游车上载有12位游客，沿途有6个旅游景点，如果到达一个景点无人下车就不停车．设X表示停车总次数，求E(X)．(假定每位游客在各个景点下车是等可能的，他们下车与否是相互独立的.)

解 记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个景点有人下车}\\ 0, & \text{第}i\text{个景点无人下车}\end{cases}$ $,i=1,2,\ldots,6$

则有，$P\{X_i=0\}=(5/6)^{12}$，$P\{X_i=1\}=1-(5/6)^{12}$, $i=1,2,\ldots,6$

且，$X=X_1+X_2+\ldots+X_6$

所以，$E(X)=E(X_1+X_2+\ldots+X_6)=6[1-(5/6)^{12}]$

15. 某种商品每周的需求量X~U(10, 30), 经销商店进货数量是区间[10, 30]中的某一个整数. 商店每销售一单位商品可获利500元; 若供大于求, 则剩余的每单位商品带来亏损100元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时经调剂的每单位商品仅获利300元. 求使商店每周所获利润的期望值最大的最少进货量及最大期望利润值.

解　记商店进货数量为k, 所获利润为Y, 则有

$$Y=\begin{cases}500k+300(X-k), & k\le X<30\\ 500X-100(k-X), & 10<X<k\end{cases}$$

所以,

$$E(Y)=\int_{10}^{k}\frac{1}{20}(600x-100k)dx+\int_{k}^{30}\frac{1}{20}(300x+200k)dx$$

$$=5250+350k-7.5k^2$$

故，最少进货量为23时，最大期望利润值为9332.5元.

第四章习题4.2(第132页)

2. 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求E(X)和D(X).

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx$

$=1/3+(4-1)-(8-1)/3=1$

$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(x)]^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-1)^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 x(x-1)^2dx+\int_1^2 (x-1)^2(2-x)dx$

$=1/4-2/3+1/2+\quad=1/6$

4. (1)设随机变量X_1,X_2,X_3,X_4相互独立，且有$E(X_i)=i$, $D(X_i)=5-i$, $i=1,2,3,4$.设$Y=2X_1-X_2+3X_3-X_4/2$,求$E(Y),D(Y)$.

(2) 设随机变量X, Y相互独立，且$X\sim N(720, 30^2)$, $Y\sim N(640, 25^2)$, 求$Z_1=2X+Y$, $Z_2=X-Y$, $Z_3=X+Y$的概率分布，并求$P\{X<Y\}$, $P\{X+Y>1400\}$.

解 (1) $E(Y)=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-(1/2)E(X_4)$

$$=2\times1-2+3\times3-(1/2)\times4=7$$

$$D(Y)=2^2D(X_1)+D(X_2)+3^2D(X_3)+(1/2)^2D(X_4)$$

$$=4\times4+3+9\times2+(1/4)\times1=37.25$$

(2) $Z_1\sim N(2\times720+640, 4\times30^2+25^2)=N(2080, 65^2)$

$$Z_2\sim N(720-640, 30^2+25^2)=N(80, 1525)$$

$$Z_3 \sim N(720+640,\ 30^2+25^2)=N(1360,\ 1525)$$

$$P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}=P\{Z_2<0\}$$

附表2

$$=P\{(Z_2-80)/1525^{1/2}<-80/1528^{1/2}\}$$

$$=\Phi(-80/1528^{1/2})=\Phi(-2.05)=0.9798$$

$$=1-\Phi(2.05)=1-0.97982=0.02018$$

$$P\{X+Y>1400\}=P\{(Z_3>1400\}$$

$$=P\{(Z_3-1360)/1525^{1/2}>40/1528^{1/2}\}$$

$$=1-\Phi(40/1528^{1/2})=1-\Phi(1.02)=0.1539$$

5. 卡车装运水泥，设每袋水泥重量X(单位：kg)服从$N(50, 2.5^2)$，若总重量超过2000的概率不大于0.05，那么最多可装多少袋水泥？

解　设最多装n袋水泥，则总重量$Y \sim N(50n, 2.5^2 n)$，

$$P\{Y>2000\}$$

$$=P\{(Y-50n)/2.5n^{1/2}>(2000-50n)/2.5n^{1/2}\}\le 0.05$$

$$\Phi[(2000-50n)/2.5n^{1/2}]\ge 0.95$$

附表2

$$(2000-50n)/2.5n^{1/2}\ge 1.65$$

$$20n+1.65n^{1/2}-800\le 0$$

$$n\le 39.48$$

即最多可装39袋水泥.

7. 已知正常男性成人血液中，每毫升中的白细胞数平均是7300，均方差是700. 试利用切比雪夫不等式估计，每毫升男性成人血液中白细胞数在5200~9400之间的概率.

解 $p=P\{5200<X<9400\}=P\{|X-7300|<2100\}$

$$\geq 1-700^2/2100^2=8/9$$

8. 设X为随机变量，c是任意常数，证明：$D(X)\leqslant[E(X-c)^2]$且等号成立当且仅当$c=E(X)$，（不等式的含义是方差$D(X)$是$E[(X-c)^2]$的最小值.）

解 因为$E[(X-c)^2]=E(X^2-2cX+c^2)$

$$=E(X^2)-2cE(X)+c^2=D(X)+[E(X)-c]^2$$

所以，$D(X)\leqslant[E(X-c)^2]$且等号成立当且仅当$c=E(X)$.

第四章习题4.3(第141页)

2. 设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}$$

求X, Y的相关系数.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1(2x-x^2-xy)dxdy$

$$=\int_0^1(2x-x^2-x/2)dx=1-1/3-1/4=5/12$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1(2x^2-x^3-x^2y)dxdy$$

$$=2/3-1/4-1/6=1/4$$

由对称性有: $E(Y)=5/12$, $E(Y^2)=1/4$.

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1(2xy-x^2y-xy^2)dxdy=1/6$$

所以，$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/4-(5/12)^2=11/144$

$D(Y)=11/144$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1/6-(5/12)^2=-1/144$

于是，$\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{-1/144}{11/144}=-\dfrac{1}{11}$

3．设随机变量(X, Y)的分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	**1/8**	**1/8**	**1/8**
0	**1/8**	**0**	**1/8**
1	**1/8**	**1/8**	**1/8**

证明：X与Y不相关，且不相互独立的．

证明 由于$E(X)=-1\times3/8+0\times2/8+1\times3/8=0$

$$E(Y)=-1\times3/8+0\times2/8+1\times3/8=0$$

$$E(XY)=1\times1/8-1\times1/8+1\times1/8-1\times1/8=0$$

所以，$Cov(X,Y)=0$, X和Y是不相关的.

又 $P\{X=1\}\times P\{Y=1\}=3/8\times3/8\neq P\{X=1,Y=1\}$

故, X和Y不是相互独立的.

6. 随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立, 有相同的期望μ和方差σ^2, 设 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Y_i=X_i-\overline{X}, i=1,2,\ldots,n$，求: (1) $E(\overline{X})$, $E(Y_1)$, (2) $D(X)$, $D(Y_1)$, (3) $xov(X_i, \overline{X})$, (4) $cov(Y_1, Y_n)$.

解 (1) $E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$

$$E(Y_1)=E(X_1)-E(\overline{X})=0$$

(2) $D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$

由于 $Y_1=X_1-\overline{X}=(1-1/n)X_1-(1/n)X_2-\dots-(1/n)X_n$

所以，$D(Y_1)=(1-1/n)^2D(X_1)+(1/n^2)D(X_2)+\dots+(1/n^2)D(X_n)$

$=[(1-1/n)^2+(n-1)/n^2]\sigma^2=[(n-1)/n]\sigma^2$

(3) $\operatorname{cov}(X_i,\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\frac{1}{n}\operatorname{cov}(X_i,X_i)=\frac{1}{n}\sigma^2$

(4) $\operatorname{cov}(Y_1,Y_n)=\operatorname{cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$

$=\operatorname{cov}(X_1,X_n)-\operatorname{cov}(\overline{X},X_n)-\operatorname{cov}(X_1,\overline{X})+\operatorname{cov}(\overline{X},\overline{X})$

$=0-\frac{1}{n}\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=-\frac{1}{n}\sigma^2$

7. 已知随机变量X, Y的方差均存在, 则下列等式不一定成立的是[A].

(A) $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$;

(B) $D(X-Y)=E[(X-Y)^2]-[E(X-Y)]^2$;

(C) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{cov}(X, Y)$;

(D) $D(X-Y)=E[(X-E(X))-(Y-E(Y))]^2$;

8. 随机变量$X\sim N(0, 1)$, $Y\sim N(1, 4)$, 相关系数$\rho_{XY}=1$, 则正确的是[B].

(A) $P\{Y=-2X+1\}=1$;　　(B) $P\{Y=2X+1\}=1$;

(C) $P\{Y=-2X-1\}=1$;　　(D) $P\{Y=2X-1\}=1$.

第四章习题4.4(第143页)

1. 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，求X的k阶原点矩.

解 $E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx=\int_0^{\infty}\lambda x^k e^{-\lambda x}dx$

$$=\int_0^{\infty} kx^{k-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{k(k-1)}{\lambda}\int_0^{\infty}x^{k-2}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\cdots=\frac{k!}{\lambda^{k-1}}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{k!}{\lambda^k}$$

2. 设随机变量X~U(0, 2)，求X的k阶中心距.

解 E(X)=1, X的k阶中心距为:

$$E[(X-1)^k]=\int_0^2 (x-1)^k\frac{1}{2}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{k+1}, & k\text{为偶数}\\ 0, & k\text{为奇数}\end{cases}$$

第4章章末习题4(第150页)

1. 某种鸟在某时间区间$(0, t_0]$内下蛋数为1~5只，下r只蛋的概率与r成正比，一个拾鸟蛋的人在时刻t_0去收集鸟蛋，但仅当鸟窝中多于3只蛋时他才从中取走1只蛋. 在某处有这种鸟窝6个,每个鸟窝保存完好,各鸟窝中蛋的个数相互独立.

(1) 写出一个鸟窝中蛋的个数X的分布律；(2) 对于指定的一个鸟窝，求拾蛋人在该鸟窝中拾到1只蛋的概率；(3) 求拾蛋人在6个鸟窝中拾到蛋的总数Y的分布律及数学期望；(4) 求$P\{X<4\}$, $P\{Y>4\}$；(5) 当一个拾蛋人在这6个鸟窝中拾过蛋后，紧接着又有一个拾蛋人到这些鸟窝中拾蛋，也仅当鸟窝中多于3只蛋时，才取走1只蛋. 求第二个拾蛋人拾得的蛋数Z的数学期望.

解 (1) 由已知有$P\{X=r\}=kr$, $r=1,2,\ldots,5$

由于 $\sum_{r=1}^{5} P\{X=r\}=1$，所以，$k=1/15$. X的分布律为：

$$P\{X=r\}=r/15,\quad r=1,2,3,4,5$$

(2) $p=P\{X>3\}=3/5$.

(3) 由已知可得：$Y\sim B(6,3/5)$，所以Y的分布律为：

$$P\{Y=k\}=C_6^k\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{6-k}=C_6^k\frac{3^k\times 2^{6-k}}{5^6},\quad k=0,1,\ldots,6$$

$$E(Y)=6\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$$

(4) $P\{X<4\}=1-P\{X\geqslant 4\}=2/5$.

$$P\{Y>4\}=P\{Y=5\}+P\{Y=6\}=\frac{6\times 3^5\times 2+3^6}{5^6}=0.23328$$

(5) $Z\sim B(6,1/3)$，所以，$E(Z)=2$.

5.已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有3件合格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品，从甲箱中任取3件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数X的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解 X只能取0, 1, 2, 3四个值，其分布律为：

$P\{X=0\}=3/6\times 2/5\times 1/4=1/20;$

$P\{X=1\}=3\times 3/6\times 3/5\times 2/4=9/20;$

$P\{X=2\}=3\times 3/6\times 2/5\times 3/4=9/20;$

$P\{X=3\}=3/6\times 2/5\times 1/4=1/20;$

所以，(1) $E(X)=3/2=1.5.$

(2) $P=9/20\times 1/6+9/20\times 1/3+1/20\times 1/2=1/4$

6. 有3只球，4只盒子，盒子的编号为1,2,3,4. 将球逐个独立地随机放入4只盒子中去. 以X表示其中至少有一只球的盒子的最小号码，例如X=3表示第1号，第2号盒子是空的，第3号盒子至少有一只球)，试求E(X).

解 $P\{X=1\}=1-3^3/4^3=37/64$

$P\{X=2\}=(3^3-2^3)/4^3=19/64$

$P\{X=3\}=(2^3-1)/4^3=7/64$

$P\{X=4\}=1/4^3=1/64$

$E(X)=1\times 37/64+2\times 19/64+3\times 7/64+4\times 1/64=25/16$

8. 从数字0,1,…, n中任取两个不同的数字，求这两个数字之差的绝对值的数学期望.

解 记X="这两个数字之差的绝对值"，则

$P\{X=k\}=(n-k+1)/C_{n+1}^2$，$k=1,2,\ldots,n$

所以, $E(X)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k(n-k+1)}{C_{n+1}^{2}}$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left[\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$=n+1-\frac{2n+1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(n+2)$$

9. 设A, B为随机事件，且$P(A)=1/4$, $P(B|A)=1/3$, $P(A|B)=1/2$, 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求: (1) 二维随机变量(X, Y)的概率分布; (2) X和Y的相关系数$\rho(X, Y)$; (3) $Z=X^2+Y^2$的概率分布.

解 (1) 由已知可得: $P(AB)=1/12$, $P(B)=1/6$, $P(A-B)=1/6$, $P(B-A)=1/12$, $P(A+B)=1/3$, 所以, (X,Y)的分布律为:

$X \backslash Y$	0	1
0	2/3	1/12
1	1/6	1/12

$X \backslash Y$	0	1
0	2/3	1/12
1	1/6	1/12

(2) 由(1)可得：$E(X)=1/4$，$E(Y)=1/6$，$E(XY)=1/12$，$E(X^2)=1/4$，$E(Y^2)=1/6$，所以，$D(X)=3/16$，$D(Y)=5/36$，$cov(X,Y)=1/24$，因此，$\rho(X,Y)=1/\sqrt{15}$

(3) $Z=X^2+Y^2$ 只能取0, 1, 2，其分布律为：

$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=2/3$,

$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=1/4$,

$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=1/12$.

10. 设随机变量X的概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}1/2, & -1<x<0\\ 1/4, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令Y=X^2，求cov(X,Y).

解 由于 $E(XY)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{0}x^3/2dx+\int_{0}^{2}x^3/4dx=-1/8+1=7/8$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x/2dx+\int_{0}^{2}x/4dx=1/4$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2/2dx+\int_{0}^{2}x^2/4dx=5/6$$

所以，cov(X,Y)=E(XY) – E(X)E(Y)=7/8 – 1/4×5/6 = 2/3.

11. 随机变量X和Y的期望分别为-2和2，方差分别为1和4，相关系数为-0.5，试根据切比雪夫不等式估计概率$P\{|X+Y|\geq 6\}$.

解　由于 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho(X,Y)\times D(X)^{1/2}D(Y)^{1/2}=-1$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=3$$

由切比雪夫不等式有：

$$P\{|X+Y|\geq 6\}\leq D(X+Y)/36=1/12.$$

12. 二维随机变量(X, Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

且$E(X)=-0.2$, $P\{Y\leqslant 0 \mid X\leqslant 0\}=0.5$, 记$Z=X+Y$, 求: (1) 常数a, b, c; (2) $P\{X=Z\}$; (3) Z的分布律.

解 (1) 由已知有: $a+b+c+0.6=1$, $c-a-0.1=-0.2$, $(a+b+0.1)/(a+b+0.5)=0.5$.

解得: $a=0.2$, $b=0.1$, $c=0.1$.

(2) $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=b+0.1=0.2$

(3) Z只能取$-2, -1, 0, 1, 2$, 其分布律为:

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

14. 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光.电梯于每个整点的第5分钟,25分钟和55分钟从底层起行.假设一游客在早八点的第X分钟到达底层候梯处,且X在[0, 60]上均匀分布,求该游客等候时间的数学期望.

解　记该游客等候时间为Y,则有

$$Y=\begin{cases}5-X\quad, & X\le 5\\ 25-X, & 5<X\le 25\\ 55-X, & 25<X\le 55\\ 65-X, & 55<X\le 60\end{cases}$$

所以,$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f(x)dx=\int_0^5 \frac{5-x}{60}dx+\int_5^{25}\frac{25-x}{60}dx$

$$+\int_{25}^{55}\frac{55-x}{60}dx+\int_{55}^{60}\frac{65-x}{60}dx=\frac{35}{3}\text{(分钟)}$$

15. 一商店经销某种商品，每周进货的数量X与顾客对该种商品的需求量Y是相互独立的随机变量，且均服从区间[10, 20]上的均匀分布．商店每售出一单位商品可得利润1000元；若需求量超过了进货量，商店可从其它商店调剂供应，这时每单位商品获利为500元．试计算商店经销该种商品的每周利润的期望值．

解 记周利润为R，则有

$$R=\begin{cases}1000Y, & 10\le Y\le X\le 20\\ 1000X+500(Y-X), & 10\le X<Y\le 20\end{cases}$$

(X, Y)的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1/100, & 10\le x,y\le 20\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所以，$$E(R)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Rf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}1000y\frac{1}{100}dy+\int_{10}^{20}dx\int_{x}^{20}500(x+y)\frac{1}{100}dy$$

$$=\int_{10}^{20}5(x^2-100)dx+\int_{10}^{20}[5x(20-x)+2.5(400-x^2)]dx$$

$$=\int_{10}^{20}(100x+500-2.5x^2)dx$$

$$=50(400-100)+500(20-10)-5/6(8000-1000)$$

$$=15000+5000-17500/3=42500/3\approx14167(\text{元})$$

第五章习题5.1(第155页)

设$X_1, X_2, \ldots$是独立同分布的随机变量序列. 在下列两种情形下，问 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于什么值?

(1) $X_i \sim P(\lambda)$, $i=1, 2, \ldots$;

(2) $X_i \sim U(0, \theta)$, $i=1,2,\ldots$, 其中$\theta>0$.

解 由于独立同分布序列均值收敛到自身的数学期望，所以，

(1) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于λ.

(2) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于$\theta/2$.

附表2

第五章习题5.2(第159页)

1、已知某厂生产的晶体管的寿命服从均值为100小时的指数分布，现在从该厂的产品中随机地抽取64只，求这64只晶体管的寿命总和超过7000小时的概率.(假定这些晶体管的寿命是相互独立的.)

解 记第i只晶体管的寿命为X_i, 则$X_i \sim E(1/100)$.

所以, $E(X_i)=100$, $D(X_i)=10000$, $i=1, 2,\ldots, 64$

于是

$$P\{\sum_{i=1}^{64} X_i > 7000\} = P\{\frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64\times 100}{\sqrt{64}\times 100} > \frac{7000-6400}{800}\}$$

$$\approx 1-\Phi(0.75)=1-0.77337=0.22663$$

附表2

4、报童沿街向行人兜售报纸. 设每位行人买报的概率为0.2, 且他们买报与否是相互独立的. 求报童在向100位行人兜售之后, 卖掉15~30份报纸的概率 .

解 记 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{人买报纸} \\ 0, & \text{第}i\text{人不买报纸} \end{cases}$

则 $X_i \sim B(1, 0.2)$, $E(X_i)=0.2$, $D(X_i)=0.16$, $i=1, 2, \ldots, 100$.

于是

$$P\{15 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 30\} = P\{-\frac{5}{4} < \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 20}{4} < \frac{10}{4}\}$$

$$\approx \Phi(2.5) - \Phi(-1.25) = \Phi(2.5) + \Phi(1.25) - 1$$

$$= 0.99379 + 0.89435 - 1 = 0.88814$$

附表2

6. 随机地选取两组学生，分别在两个实验室里测量某种化合物的PH值，每组80人. 假定各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，且服从同一分布，数学期望为5，方差为0.3，以 $\overline{X}$，$\overline{Y}$ 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均，求：(1) $P\{4.9<\overline{X}<5.1\}$；(2) $P\{-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1\}$.

解 (1) $P\{4.9<\overline{X}<5.1\}=P\{|\dfrac{\overline{X}-5}{\sqrt{0.3/80}}|<\dfrac{0.1}{\sqrt{0.3/80}}\}$

附表2

$$\approx 2\Phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{0.3/80}}\right)-1$$

$$=2\Phi(1.63)-1=0.8969$$

$$(2)\ 由\ \overline{X} \overset{近似地}{\sim} N(5, 0.00375),\ \overline{Y} \overset{近似地}{\sim} N(5, 0.00375)$$

$$得\ \overline{X} - \overline{Y} \overset{近似地}{\sim} N(0, 0.0075)$$

附表2

$$P\{-0.1 < \overline{X} - \overline{Y} < 0.1\} = P\{\left|\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{0.0075}}\right| < \frac{0.1}{\sqrt{0.0075}}\}$$

$$\approx 2\Phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{0.0075}}\right) - 1$$

$$= 2\Phi(1.15) - 1 = 0.7498$$

第五章习题5.2(第159页)

1、设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，均服从参数为2的指数分布，则$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$依概率收敛于________.

解 由于独立同分布序列均值收敛到自身的数学期望，而$E(X_i^2) = D(X_i) + E^2(X_i) = 1/2$，故，应填“1/2”.

附表2

2. 一部件包括10部分，每部分的长度是一个随机变量，它们相互独立，且服从同一分布，其数学期望为2mm，均方差为0.05mm. 规定总长度为(20±0.1)mm时产品合格，试求产品合格的概率.

解　记X=“总长度”，X_i=“第i部分长度”

由已知，X_i独立同分布，且$X=X_1+X_2+\ldots+X_{10}$

于是，$(X-10\times 2)/(10^{1/2}\times 0.05)$近似服从标准正态分布.

P{产品合格}=$P\{|X-20|<0.1\}$

$$=P\left\{\left|\frac{X-20}{\sqrt{10}\times 0.05}\right|<\frac{0.1}{\sqrt{10}\times 0.05}\right\}$$

$=2\Phi(0.63)-1=0.4714$

附表2

3. 有3000个同龄的人参加了某人寿保险公司里人寿保险. 参加了保险的人在第1年的第一天须交付保险费10元, 死亡时家属可从保险公司领取2000元. 若在1年内每人的死亡率为0.1%, 求保险公司亏本的概率.

解 记X="3000人中死亡人数", 则$X\sim B(3000, 0.001)$.

所以,

$$P\{X>15\}=P\left\{\frac{X-3}{\sqrt{3\times0.999}}>\frac{12}{\sqrt{3\times0.999}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(6.93)\approx 0$$

附表2

4. (1)一个复杂系统由100个相互独立起作用的部件组成. 在整个运行期间, 每个部件损坏的概率为0.1, 为使整个系统起作用, 至少须有85个部件正常工作, 求整个系统起作用的概率.

(2)一个复杂系统由n个相互独立起作用的部件组成, 每个部件的可靠性为0.9, 且至少须有80%的部件工作才能使整个系统正常工作. 问n至少为多大才能使系统的可靠性不低于0.95.

解 (1) 记X＝“100个部件损坏的件数”，则

X~B(100,0.1)

$$P\{X<15\}=P\{\frac{X-10}{3}<\frac{5}{3}\}\approx\Phi(1.67)=0.9525$$

附表2

(2) P{X>0.8n}= $P\{\frac{X-0.9n}{\sqrt{0.09n}}>-\frac{0.1n}{\sqrt{0.09n}}\}\approx\Phi(\frac{0.1n}{\sqrt{0.09n}})\geq 0.95$

$$\frac{0.1n}{\sqrt{0.09n}}\geq 1.65$$

所以，n≥24.5，即n至少为25.

第六章习题6.1(第169页)

1. 设X_1, X_2, X_3, X_4是来自正态总体$N(\mu, 1)$的一个样本，

记，$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1-X_2), Y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(2X_3-X_1-X_2), Y_3=\frac{1}{\sqrt{12}}(3X_4-X_1-X_2-X_3)$

试证：Y_1, Y_2和Y_3均服从$N(0,1)$.

证明：由于$X_i \sim N(\mu, 1)$且相互独立，所以Y_i是正态分布.

$E(Y_1)=2^{-1/2}(\mu-\mu)=0, D(Y_1)=1/2(1+1)=1$

所以，$Y_1 \sim N(0, 1)$.

同理，$Y_2, Y_3 \sim N(0, 1)$.

2. 设某厂用自动装瓶机灌装饮料，从生产线上随机抽取20瓶饮料，测量了它们的实际装瓶量(单位: ml)，得到如下一组数据:

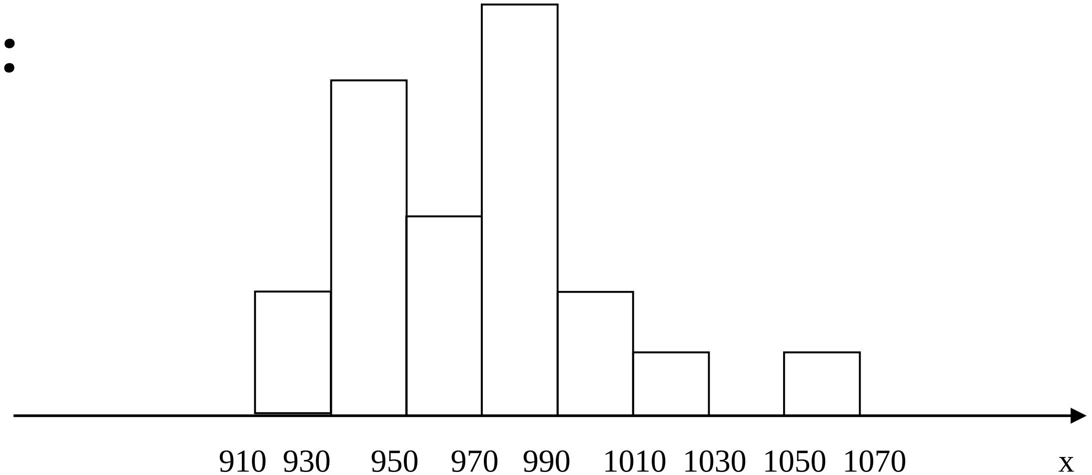
985 940 975 1020 940 975 1060 945 920 980
920 990 980 1010 935 945 1010 960 955 960

试列出数据的频数分布表，画出直方图.

解 首先从$n=20$个数据中找出最小值$x_1^*=920$和最大值$x_n^*=1060$; 取$a=910$, $b=1070$; 将区间$(910, 1070]$分成8等分，即组数$k=8$, 各组组距均为20，分组及频数、频率如下:

组 号	装瓶量区间	频 数n_i	频率f_i
1	(910, 930]	2	0.10
2	(930, 950]	5	0.25
3	(950,970]	3	0.15
4	(970,990]	6	0.30
5	(990,1010]	2	0.10
6	(1010,1030]	1	0.05
7	(1030,1050]	0	0
8	(1050,1070]	1	0.05
合计		20	1.00

作出的直方图为:



3. 掷骰子得到如下一组数据：

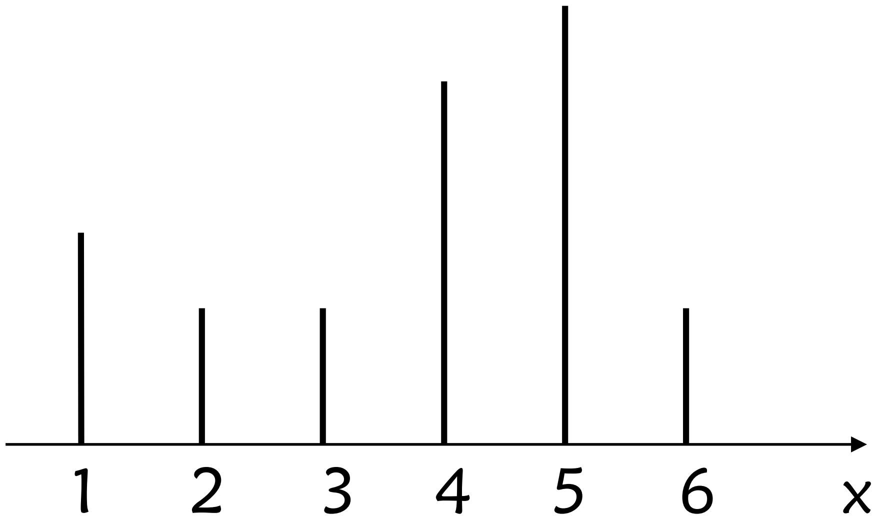
5 3 6 5 4 5 2 1 6 5 4 1 3 4 5 4 1 2 5 4

试列出数据的频数分布表，画出条形图，给出经验分布函数.

解 频率分布表为：

骰子数	频 数n_i	频率f_i
1	3	0.15
2	2	0.10
3	2	0.10
4	5	0.25
5	6	0.30
6	2	0.10
合计	20	1.00

条形图为：



经验分布函数为：

$$F_{20}(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 0.15, & 1\le x<2 \\ 0.25, & 2\le x<3 \\ 0.35, & 3\le x<4 \\ 0.6, & 4\le x<5 \\ 0.9, & 5\le x<6 \\ 1, & x\ge 6 \end{cases}$$

第六章习题6.2(第172页)

1. 观测到5头母羊的体重(单位:千克)分别为53.2, 51.3, 54.5, 47.8, 50. 9, 试计算这组样本观测值的数字特征: (1)样本总和; (2)样本均值; (3)样本离差平方和; (4)样本方差; (5)样本标准差; (6)众数; (7)中位数.

解 (1) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=257.7$

(2) $\overline{x}=257.7/5=51.54$

(3) $ss=25.972$

(4) $s^2=25.972/4=6.493$

(5) $s=2.548$

(6) 无

(7) $M_e=51.3$

2. 设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是一组实数，$y_i = (x_i - a)/b$ $(i=1,2,\ldots,n)$，其中a, b(b≠0)为任意实数；$\bar{x}$，$\bar{y}$分别为两组实数的均值，s_X^2, s_Y^2分别为两组实数的方差，证明：(1) $\bar{y} = (\bar{x} - a)/b$；(2) $s_Y^2 = s_X^2/b^2$.

证明 (1) $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - a}{b} = \frac{1}{b}\times\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right) = \frac{\bar{x} - a}{b}$$

(2) $$s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - a}{b} - \frac{\bar{x} - a}{b}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b^2}\times\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{s_X^2}{b^2}$$

3. 设总体$X\sim N(12,4)$，今从中抽取容量为n的一个样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$，其样本均值记为$\overline{X}$，

(1) 若$n=5$，求$P\{\overline{X}>13\}$;

(2) 求$P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)<10\}$;

(3) 求$P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)>15\}$;

(4) 若使$P\{11<\overline{X}<13\}\geqslant 0.95$，问样本容量n至少取多少?

解 (1) $P\{\overline{X}>13\}=P\{\dfrac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}>\dfrac{\sqrt{5}}{2}\}=1-\Phi(\dfrac{\sqrt{5}}{2})=0.1314$

(2) $P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)<10\}$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)>10\}=1-\prod_{i=1}^{5}P\{X_i>10\}$$

$$=1-\prod_{i=1}^{5}P\{\frac{X_i-12}{2}>-1\}=1-\Phi(1)^5=0.5784$$

(3) $P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)>15\}$

$$=1-P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)<15\}=1-\prod_{i=1}^{5}P\{X_i<15\}$$

$$=1-\prod_{i=1}^{5}P\{\frac{X_i-12}{2}<1.5\}=1-\Phi(1.5)^5=0.2923$$

(4) 由于 $0.95\le P\{11<\overline{X}<13\}=P\{|\frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{n}}|<\frac{\sqrt{n}}{2}\}$

所以，$2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})-1\ge 0.95$，$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2})\ge 0.975$

即，$\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.96$

故，$n\geqslant 15.37$

所以，n至少取16.

4. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{25}$与$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{25}$分别是两个相互独立总体$N(0, 16)$与$N(1,9)$的简单随机样本，$\overline{X}$，$\overline{Y}$为两个样本的样本均值，求$P\{\overline{X} > \overline{Y}\}$.

解 由已知有：$\overline{X} \sim N(0, 16/25)$，$\overline{Y} \sim N(1, 9/25)$，

所以，$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(-1, 1)$，于是

$$P\{\overline{X} > \overline{Y}\} = P\{\frac{\overline{X} - \overline{Y} + 1}{1} > 1\}$$

$$= 1 - \Phi(1) = 0.15866$$

第六章习题6.3(第177页)

1. 设$z_{1-\alpha}=z_{0.975}=-1.96$，写出有关的上$\alpha$分位数.

解 由已知，$\alpha=0.025$，且$P\{Z>-1.96\}=0.975$

所以，$0.025=1-0.975=1-P\{Z>-1.96\}=P\{Z>1.96\}$

因此，$z_{\alpha}=z_{0.025}=1.96$

5. 设$X_1, X_2, \dots, X_{20}$是来自正态总体$N(0, 0.3^2)$的一个样本，求：

(1) $P\{\sum_{i=1}^{16} X_i^2 > 2.88\}$； (2) $P\{\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{X_{10}^2+X_{11}^2+\cdots+X_{18}^2}} > 1.383\}$；

(3) $P\{\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_8^2}{X_9^2+X_{10}^2+\cdots+X_{20}^2} > 1.9\}$

解 (1) 由于$X_i/0.3 \sim N(0, 1)$，故 $\sum_{i=1}^{16}\dfrac{X_i^2}{0.3^2} = \dfrac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{16} X_i^2 \sim \chi^2(16)$

所以，$P\{\sum_{i=1}^{16} X_i^2 > 2.88\} = P\{\dfrac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{16} X_i^2 > 32\} = 0.01$ $(\chi_{0.01}(16)=32)$

(2) 由于$(X_1+X_2+\dots+X_9)/0.9 \sim N(0, 1)$，$\sum_{i=10}^{18}\dfrac{X_i^2}{0.3^2} \sim \chi^2(9)$

所以，$\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)/0.9}{\sqrt{(X_{10}^2+X_{11}^2+\cdots+X_{18}^2)/0.3^2/9}} = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{X_{10}^2+X_{11}^2+\cdots+X_{18}^2}} \sim t(n)$

$$P\{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{X_{10}^2+X_{11}^2+\cdots+X_{18}^2}}>1.383\}=0.1$$ （因为$t_{0.1}(9)=1.383$）

(3) 由于

$$\frac{(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_8^2)/0.3^2/8}{(X_9^2+X_{10}^2+\cdots+X_{20}^2)/0.3^2/12}=\frac{3(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_8^2)}{2(X_9^2+X_{10}^2+\cdots+X_{20}^2)}\sim F(8,12)$$

所以，

$$P\{\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_8^2}{X_9^2+X_{10}^2+\cdots+X_{20}^2}>1.9\}=P\{\frac{3(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_8^2)}{2(X_9^2+X_{10}^2+\cdots+X_{20}^2)}>2.85\}$$

$$=0.05$$

这是因为$F_{0.05}(8,12)=2.85$.

6. 设$X\sim t(n)$，证明：$X^2\sim F(1, n)$.

证明 由于$X\sim t(n)$，所以有$Y\sim N(0,1)$，$Z\sim\chi^2(n)$使得：

$$X=\frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$$

所以，$X^2=\frac{Y^2}{Z/n}$

由于$Y^2\sim\chi^2(1)$，$Z\sim\chi^2(n)$，

所以，$X^2\sim F(1, n)$.

第六章习题6.4(第180页)

1. 选择题.

(1)设$X_1,X_2,\ldots,X_n(n\geqslant 2)$为来自正态总体$N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，$S^2$为样本方差，则正确的是[D].

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$；　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$；

(C) $(n-1)\overline{X}/S\sim t(n-1)$；　(D) $(n-1)X_1^2/\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2\sim F(1,n-1)$.

(2) 设随机变量$X\sim t(n)(n>1)$, $Y=1/X^2$, 则正确的是[C].

(A) $Y\sim\chi^2(n)$; (B) $Y\sim\chi^2(n-1)$; (C) $Y\sim F(n,1)$; (D)$Y\sim F(1,n)$

(3)设随机变量X和Y均服从标准正态分布,则正确的是[C].

(A) $X+Y$服从正态分布；　(B) X^2+Y^2服从分布；

(C) X^2和Y^2都服从χ^2分布；　(D) X^2/Y^2服从F分布.

2. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{2n}(n\geqslant 1)$为来自正态总体$N(1, 0.5)$的一个样本，求统计量$Y=(X_1-X_2)^2+(X_3-X_4)^2+\ldots+(X_{2n-1}-X_{2n})^2$的分布.

解 由于$X_{2i-1}-X_{2i}\sim N(0, 1)$，所以$Y\sim\chi^2(n)$.

3. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{2n}(n\geqslant 1)$为来自正态总体$N(0, \sigma^2)$的一个样本，$U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{X_{n+1}^2+X_{n+2}^2+\cdots+X_{2n}^2}}$，求统计量U的分布.

解 $U\sim t(n)$.

4. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{20}$为来自正态总体$N(0, \sigma^2)$的一个样本，求统计量$Z=\dfrac{X_1^2+X_3^2+\cdots+X_{19}^2}{X_2^2+X_4^2+\cdots+X_{20}^2}$的分布.

解 $Z\sim F(10, 10)$.

第六章章末习题6(第180页)

5. 设X_1, X_2, X_3是来自正态总体$N(0, 1)$的一个样本，证明：$Y_1=\sqrt{2}(0.3X_1-0.4X_2-0.5X_3), Y_1=0.8X_1+0.6X_2$ 均与总体同分布.

证明 由已知Y_1, Y_2都服从正态分布，且$E(Y_1)=E(Y_2)=0$,

$D(Y_1)=2(0.09+0.16+0.25)=1$, $D(Y_2)=0.64+0.36=1$.

所以，Y_1, Y_2都服从标准正态分布.

7. 设$X_1, X_2,\ldots,X_9$为来自正态总体的样本，$Y_1=1/6(X_1+X_2+\ldots+X_6)$，$Y_2=1/3(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$

证明：统计量Z服从自由度为2的t分布.

证明 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y_1\sim N(\mu,\sigma^2/6)$，$Y_2\sim N(\mu,\sigma^2/3)$，

于是，$Y_1-Y_2\sim N(0,\sigma^2/2)$，$\sqrt{2}(Y_1-Y_2)/\sigma\sim N(0,1)$

又由于，$2S^2/\sigma^2\sim\chi^2(2)$，

所以，

$$\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)/\sigma}{\sqrt{2S^2/\sigma^2/2}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim t(2)$$

8. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X}$和S^2为样本均值和样本方差，又设$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$，且$X_{n+1}$与$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，求统计量$\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}$的分布.

解 由于 $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$，故$X_{n+1} - \overline{X} \sim N(0, (n+1)\sigma^2/n)$，

所以，$\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}(X_{n+1} - \overline{X})/\sigma \sim N(0,1)$

又由于，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

所以，
$$\frac{\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}(X_{n+1} - \overline{X})/\sigma}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S} \sim t(n-1)$$

9. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(0, 1)$的样本，$\overline{X}$和S^2为样本均值和样本方差，$T = \overline{X}^2 - S^2/n$，求$D(T)$.

解　由于 $\overline{X}$与S^2相互独立，所以

$$D(T) = D(\overline{X}^2) + D(S^2)/\mathrm{n}^2$$

又由于 $\overline{X} \sim N(0, 1/n)$，$\sqrt{\mathrm{n}}\,\overline{X} \sim N(0,1)$，$(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$.

所以，$E(n\overline{X}^2) = D(\sqrt{n}\,\overline{X}) + E^2(\sqrt{n}\,\overline{X}) = 1$

$$E(n^2\overline{X}^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 3$$

于是，$n^2 D(\overline{X}^2) = D(n\overline{X}^2) = E(n^2\overline{X}^4) - E^2(n\overline{X}^2) = 2$

所以，$D(\overline{X}^2) = 2/n^2$，$(n-1)^2 D(S^2) = D[(n-1)S^2] = 2(n-1)$

所以，$D(T) = D(\overline{X}^2) + \dfrac{D(S^2)}{n^2} = \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{2}{n^2(n-1)} = \dfrac{2}{n(n-1)}$

第七章习题7.1(第192页)

1. (1) 设X服从参数为λ(λ>0) 的泊松分布，其中λ未知；$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的一个样本，求λ的矩估计和最大似然估计. (2) 设X服从参数为λ(λ>0)的指数分布，其中λ未知；$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的一个样本，求λ^{-1}的矩估计和最大似然估计.

解 (1) 由于$X\sim P(\lambda)$，所以，$E(X)=\lambda$，

令 $\lambda=\overline{X}$，得参数λ的矩估计量为：$\widehat{\lambda}=\overline{X}$

参数λ的矩估计值为：$\widehat{\lambda}=\overline{x}$

样本的似然函数为：$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$

所以，

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!$$

令 $$0=\frac{d\ln \mathrm{L}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n$$

得参数λ的最大似然估计值为：$\hat{\lambda}=\bar{x}$

参数λ的最大似然估计量为：$\hat{\lambda}=\bar{X}$

(2) 由于$X\sim E(\lambda)$，所以，$E(X)=1/\lambda$，

令$1/\lambda=\bar{X}$，得参数λ^{-1}的矩估计量为：$\widehat{\lambda^{-1}}=\bar{X}$

参数λ^{-1}的矩估计值为：$\widehat{\lambda^{-1}}=\bar{x}$

样本的似然函数为： $L(\lambda)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, x_i\geq 0\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

所以，

$$\ln L(\lambda)=\begin{cases}n\ln\lambda-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i, & x_i\geq 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

令 $$0=\frac{d\ln \mathrm{L}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i$$

得参数 λ^{-1} 的最大似然估计值为： $\widehat{\lambda}^{-1}=\overline{x}$

参数 λ^{-1} 的最大似然估计量为： $\widehat{\lambda}^{-1}=\overline{X}$

3．设总体X的分布律为：

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta(1-\theta)$	θ^2

其中θ (0<θ<1) 未知．以n_i表示来自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数(i=1,2,3)，求θ的最大似然估计．

解　样本的似然函数为：

$$L(\theta)=(1-\theta)^{n_1}\times[\theta(1-\theta)]^{n_2}\times(\theta^2)^{n_3}$$

所以，$\ln L(\theta)=n_1\ln(1-\theta)+n_2[\ln\theta+\ln(1-\theta)]+2n_3\ln\theta$

令　$0=\dfrac{d\ln \mathrm{L}(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n_1}{1-\theta}+n_2\left(\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}\right)+\dfrac{2n_3}{\theta}$

得参数θ的最大似然估计值为：$\hat{\theta}=\dfrac{n_2+2n_3}{n_1+2n_2+2n_3}$

5. 某元件的使用寿命X的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0\quad, & x<\theta\end{cases}$$

其中θ(θ>0)未知. 设$x_1, x_2,\ldots, x_n$是X的一组样本观测值, 求θ的矩估计和最大似然估计.

解 由于$E(X)=\int_{\theta}^{+\infty}2xe^{-2(x-\theta)}dx=\theta+\int_{\theta}^{+\infty}e^{-2(x-\theta)}dx=\theta+\dfrac{1}{2}$

令 $\theta+\dfrac{1}{2}=\overline{x}$, 得θ的矩估计值为: $\hat{\theta}=\overline{x}-\dfrac{1}{2}$.

样本的似然函数为: $L(\theta)=2^n e^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$, $x_i\ge\theta, i=1,2,\ldots,n$

可见, θ的最大似然估计值为: $\hat{\theta}=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$

7*. 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数θ的无偏估计量，方差 $D(\hat{\theta})$ 依赖于子样容量n，若 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta})=0$，试证 $\hat{\theta}$ 是θ的相合估计量.

解 由于 $E(\hat{\theta})=\theta$，由切比雪夫不等式有：

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}\geq \lim_{n\to\infty}[1-\frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}]=1$$

即，$\hat{\theta}$ 是θ的相合估计量.

8. 设 $X_1, X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的简单随机样本，试证：

$$\frac{1}{n_1+n_2-2}[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2]$$ 是的无偏估计.

证明 由于 $\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2\sim\chi^2(n_1-1),\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2/\sigma^2\sim\chi^2(n_2-1)$

所以，$E(\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2)=(n_1-1)\sigma^2, E(\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2)=(n_2-1)\sigma^2$

11、设X_1, X_2, X_3, X_4是来自参数为λ的指数分布总体的简单随机样本，其中λ未知. 设有估计量

$$T_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4), T_2 = \frac{1}{5}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4),$$

$$T_3 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$$

(1) 指出T_1, T_2, T_3中哪几个是λ^{-1}的无偏估计量；

(2) 在λ^{-1}的无偏估计量中哪个较为有效？

解 由于$E(T_1)=E(T_3)=\lambda^{-1}$, $E(T_2)=2\lambda^{-1}$

所以，T_1, T_3是λ^{-1}的无偏估计量，T_2是λ^{-1}的有偏估计量.

又由于$D(T_1)=5/(18\lambda^2)$，$D(T_3)=1/(4\lambda^2)$

所以，λ^{-1}的无偏估计量中T_3较为有效.

14. (1)设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布总体的一个样本，求$P\{X=0\}$的最大似然估计.

(2)某铁路局的证实一个扳道员在五年内所引起的严重事故的次数服从泊松分布.下表是该铁路局某五年内的相关数据：

一扳道员引起的严重事故的次数	0	1	2	3	4	5
某五年中观察到的扳道员人数	44	42	21	9	4	2

求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率p的最大似然估计.

解 (1) 由于$P\{X=0\}=e^{-\lambda}$，记$\theta=e^{-\lambda}$，似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\theta^{n}\prod_{i=1}^{n}\frac{(-\ln\theta)^{x_i}}{x_i!}$$

所以，$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(-\ln\theta)+n\ln\theta-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!)$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{1}{\theta\ln\theta}+\frac{n}{\theta}=0$

得参数θ(P{X=0})的最大似然估计为：$\hat{\theta}=e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=e^{-\bar{x}}$

(2) 记一扳道员在五年内所引起的严重事故的次数为X，

$\theta=P\{X=0\}=e^{-\lambda}$，

$P\{X=1\}=\lambda e^{-\lambda}=-\theta\ln\theta$

$P\{X=2\}=\lambda^2e^{-\lambda}/2=\theta(\ln\theta)^2/2$

$P\{X=3\}=\lambda^3e^{-\lambda}/6=-\theta(\ln\theta)^3/6$

$P\{X=4\}=\lambda^4e^{-\lambda}/24=\theta(\ln\theta)^4/24$

$P\{X=5\}=\lambda^5e^{-\lambda}/120=-\theta(\ln\theta)^5/120$

所以，似然函数为：

$$L(\theta)=\theta^{44}(-\theta\ln\theta)^{42}[\theta(\ln\theta)^{2}/2]^{21}[-\theta(\ln\theta)^{3}/6]^{9}$$
$$[\theta(\ln\theta)^{4}/24]^{4}[-\theta(\ln\theta)^{5}/120]^{2}$$

所以，

$$\begin{aligned}\ln L(\theta)=&44\ln\theta+42[\ln\theta+\ln(-\ln\theta)]+21[\ln\theta+2\ln(-\ln\theta)-\ln 2]\\&+9[\ln\theta+3\ln(-\ln\theta)-\ln 6]+4[\ln\theta+4\ln(-\ln\theta)-\ln 24]\\&+2[\ln\theta+5\ln(-\ln\theta)-\ln 120]\\=&122\ln\theta+137\ln(-\ln\theta)-21\ln 2-9\ln 6-4\ln 24-2\ln 120\end{aligned}$$

令 $$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{122}{\theta}+\frac{137}{\theta\ln\theta}=0$$

得参数θ(P{X=0})的最大似然估计为：

$$\hat{\theta}=e^{-\frac{137}{122}}=0.3253$$

第七章习题7.2(第206页)

1. 已知一批零件的长度X(单位: cm)服从正态分布N(μ, 1), 从中随机地抽取16个零件, 算得长度的平均值为40cm, 求μ的置信度为0.95的置信区间.

解 由于$1-\alpha=0.95$, 所以$\alpha=0.05$, 查表得$z_{0.025}=1.96$, 于是, μ的置信度为0.95的一个置信区间为:

$$(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$$

$$=(40-\frac{1}{\sqrt{16}}\times1.96, 40+\frac{1}{\sqrt{16}}\times1.96)$$

$$=(39.51,\quad 40.49)$$

2. 用某仪器间接测量温度，重复测5次得数据：1250，1265，1245，1260，1275. 设温度X服从正态分布，试求置信度为0.99的温度均值的置信区间.

解 由$1-\alpha=0.99$，得$\alpha=0.01$，查表得$t_{0.005}(4)=4.6041$，

而且，$\overline{x}=1259$，$s^2=142.5$，

于是，μ的置信度为0.99的一个置信区间为：

$$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2})$$

$$=(1259-\sqrt{\frac{142.5}{5}}\times 4.6041,1259+\sqrt{\frac{142.5}{5}}\times 4.6041)$$

$$=(1234.42,\ \ 1283.58)$$

3. 估计一批钢索的平均张力，取样做了10次试验，由试验值算得平均张力为6720kPa，张力的标准差s为220kPa. 设张力服从正态分布，求钢索平均张力的单侧置信下限(设置信水平为0.95).

解 由$1-\alpha=0.95$，得$\alpha=0.05$，查表得$t_{0.05}(9)=1.8331$，

于是，钢索平均张力的置信度为0.99的单侧置信下限为：

$$\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)=6720-\frac{220}{\sqrt{10}}\times 1.8331$$

$$=6592.47$$

4. 测试10个灯泡，得灯泡使用时数的样本均值1500 h和样本标准差20 h. 已知灯泡使用时数服从正态分布，求σ^2及σ的置信区间(设置信水平为0.95).

解 由于$1-\alpha=0.95$，所以$\alpha=0.05$，查表得：$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}=2.7$

于是，σ^2的置信度为0.95的一个置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{9\times20^2}{19.023},\frac{9\times20^2}{2.7}\right)=(189.24,\ 1333.33)$$

σ的置信度为0.95的一个置信区间为：$(13.76,\ 36.51)$

6. 某食品处理前取样分析，含脂率为：0.19, 0.12, 0.18, 0.30, 0.21, 0.27, 0.30, 0.42, 0.66, 0.08，处理后取样分析，含脂率为0.15, 0.04, 0.13, 0.18, 0.00, 0.20, 0.07, 0.12, 0.24, 0.13, 0.24. 假如处理前后的含脂率均服从正态分布，且方差不变，试求处理前后含脂率均值差的置信水平为0.95的置信区间.

解 由$1-\alpha=0.95$，得$\alpha=0.05$，查表得：$t_{0.025}(19)=2.093$

而，$n_1=10$, $n_2=11$, $\bar{x}=0.273$, $\bar{y}=0.136$, $S_1^2=0.0281$, $s_2^2=0.00603$, $s_w^2=0.0165$, $s_w=0.128$

于是，均值差的置信度为0.95的一个置信区间为：

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$$

$$\left.\bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$=\left(0.273-0.136-2.093\times 0.128\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}},\right.$$

$$\left.0.273-0.136+2.093\times 0.128\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}}\right)$$

$$=(0.0199,\ 0.254)$$

7. 某自动机床加工一种套筒，假定套筒直径服从正态分布. 现从A, B两班的产品中各随机地抽取5个套筒，测得直径数据：A班: 2.066, 2.063, 2.068, 2.060, 2.067; B班: 2.058, 2.057, 2.063, 2.059, 2.060. 求两班套筒方差比σ_A^2/σ_B^2的置信水平为0.90的置信区间.

解 由$1-\alpha=0.9$，得$\alpha=0.1$，查表得: $F_{0.05}(4, 4)=6.39$,
$F_{0.95}(4, 4)=1/F_{0.05}(4, 4)=1/6.39=0.1565$.

而，$S_1^2=0.0000428$, $s_2^2=0.0000212$

于是，σ_A^2/σ_B^2的置信度为0.90的一个置信区间为:

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1),\frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

$$=\left(\frac{0.0000428}{0.0000212}\times 0.1565,\frac{0.0000428}{0.0000212}\times 6.39\right)=(0.316,\ \ 12.9)$$

第七章章末习题7(第207页)

3. 设分别从总体$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$中抽取容量为n, m的两个独立样本, 它们的样本方差分别为S_1^2和S_2^2. 试证: (1) 对于任意常数a, b(a+b=1), $Z=aS_1^2+bS_2^2$都是σ^2的无偏估计量; (2)确定常数a, b, 使D(Z)达到最小.

证明 (1)由于$(n-1)S_1^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$, $(m-1)S_2^2/\sigma^2\sim\chi2(m-1)$,

所以, $(n-1)E(S_1^2)/\sigma^2=n-1$, $(m-1)E(S_2^2)/\sigma^2=m-1$,

所以, $E(Z)=aE(S_1^2)+bE(S_2^2) = (a+b)\sigma^2=\sigma^2$

即, $Z=aS_1^2+bS_2^2$是σ^2的无偏估计量.

(2) $D(Z)=a^2D(S_1^2)+b^2D(S_2^2) = a^2 2\sigma^4/(n-1) + b^2 2\sigma^4/(m-1)$

$= 2[(m+n-2)a^2-2(n-1)a + (n-1)]\sigma^4/(n-1)(m-1)$

所以, 当$a = (n-1)/(m+n-2)$, $b = (m-1)/(n+m-2)$时取最小值.

5. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ $(n \geqslant 2)$是来自总体X的简单随机样本，总体X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$. 设 $\overline{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，求统计量$Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$的数学期望E(Y).

证明 由于 $X_i + X_{n+i} \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

所以, $Y/2\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$,

所以, $E(Y)/2\sigma^2 = n-1$

即, $E(Y) = 2(n-)\sigma^2$.

6. 设总体X的分布函数为$F(x,\beta)=\begin{cases}1-1/x^{\beta}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$ 其中未知参数β>1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自总体X的简单随机样本，

(1) 求β的矩估计；(2) 求β的最大似然估计.

解 可得X的概率密度函数为：$f(x,\beta)=\begin{cases}\beta/x^{\beta+1}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$

(1) 由于$E(X)=1/(\beta-1)$，令$\beta/(\beta-1)=\overline{X}$

得参数β的矩估计量为：$\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

(2) 似然函数为：$L(\beta)=\beta^n/(x_1x_2\ldots x_n)^{\beta+1}$, $x_i>1$

所以，$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\ln(x_1x_2\ldots x_n)$

令 $n/\beta-\ln(x_1x_2\ldots x_n)=0$

得参数β的最大似然估计量为：$\hat{\beta}=\dfrac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)}$

9. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的一个样本，$\hat{\theta}=\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$

而X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta\end{cases}$，其中θ>0是未知参数. (1) 求总体X的分布函数F(x); (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$; (3) 判断 $\hat{\theta}$ 是否为θ的无偏估计量.

解 (1)X的分布函数为: $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

(2) $F_{\hat{\beta}}(x)=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

(3) 由(2)可得: $f_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

所以，$E(\hat{\theta})=\theta+1/2n\neq\theta$，$\hat{\theta}$是θ的有偏估计量.

13. 假设0.50, 1.25, 0.80, 2.00是来自总体X的简单随机样本值. 已知Y=lnX服从正态分布N(μ, 1).

(1) 求X的数学期望E(X)(记E(X)为b);

(2) 求μ的置信度为0.95的置信区间;

(3) 利用上述结果求b的置信度为0.95的置信区间.

解 (1) $E(X)=E(e^Y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^y e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy$

$$=\frac{e^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}dy=\frac{e^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

(2) 由于$1-\alpha=0.95$, 所以, $\alpha=0.05$, $z_{0.025}=1.96$,

$n=4$, $\overline{Y}=[\ln0.5+\ln1.25+\ln0.8+\ln2]/4=0.$

所以, μ的置信度为0.95的置信区间为:

$$(\overline{Y}-\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{Y}+\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})=(-\frac{1.96}{\sqrt{4}},\frac{1.96}{\sqrt{4}})=(-0.98,\ \ 0.98)$$

(3) 由(2)有：$P\{-0.98<\mu<0.98\}=0.95$，且$b=e^{\mu+0.5}$

所以，$P\{-0.98<\ln b-0.5<0.98\}=0.95$

即，　$P\{e^{-0.48}<b<e^{1.48}\}=0.95$

所以，b的置信度为0.95的置信区间为：

$$(e^{-0.48},\ e^{1.48})=(0.6188,\ 4.393)$$

第八章习题8.1(第216页)

1. 对原假设H_0和备择假设H_1，(D)为犯第一类错误，(A)为犯第二类错误.

(A) H_1真，接受H_0;　　(B) H_1不真，接受H_0;

(C) H_1真，拒绝H_0;　　(D) H_1不真，拒绝H_0.

2. 假设检验的结果为接受H_0, 有可能犯的是第(二)类错误.

3. 当样本容量一定时, 显著性水平α越大, 犯第(一)类错误的概率就越大, 而犯第(二)类错误的概率则越小.

第八章习题8.2(第222页)

1. 正常人的脉搏平均为72次/分，现某医生测得10例慢性四乙基铅中毒患者的脉搏(单位:次/分)为:

54，67，67，78，70，66，67，70，65，69、

问四乙基铅中毒者和正常人的脉搏有无显著差异(假设四乙基铅中毒者的脉搏服从正态分布，$\alpha=0.05$)?

解 提出假设 $H_0: \mu=\mu_0=72$，$H_1:\mu\neq 72$，

则，拒绝域为：$\left|\dfrac{\overline{X}-72}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

由于，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\overline{x}=67.3$，$s^2=36.59$，所以

$\left|\dfrac{\overline{x}-72}{s/\sqrt{n}}\right|=2.46>2.2622$，所以在显著水平$\alpha=0.05$下拒绝$H_0$，

即，四乙基铅中毒者和正常人的脉搏是有显著差别的.

3. 内科医生声称，如果病人每天傍晚聆听一种特殊的轻音乐会降低血压(舒张压，单位:mmHg)，今随机地选了10个病人，在试验之前和试验之后分别测量了他们的血压，得到如下数据：

试验之前(x_i)：86, 92, 95, 84, 80, 78, 98, 95, 94, 96,

试验之后(y_i)：84, 83, 81, 78, 82, 74, 86, 85, 80, 82.

设$D_i=X_i-Y_i(i=1,2,\ldots,10)$为来自正态总体$X\sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$的样本，$\mu_D$, σ_D均未知，则试验结果是否说明医生的意见是对的($\alpha=0.05$)？

解 提出假设 H_0: $\mu_D\leqslant\mu_0=0$, H_1: $\mu_D>0$,

则，拒绝域为： $$\frac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}\geq t_\alpha(n-1)$$

由于，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$\overline{d}=8.3$，$s^2=38.41$，所以

$$\left|\frac{\overline{d}-0}{s/\sqrt{n}}\right|=4.235>1.8331,$$ 所以在显著水平$\alpha=0.05$下拒绝H_0，

即，在显著水平$\alpha=0.05$下，医生的意见是对的.

4. 电工器材厂生产了一批保险丝，从中抽取10个测试其溶化时间，得到如下数据：

42，65，75，78，71，59，57，68，55，54、

设整批保险丝的熔化时间服从正态分布，问是否可以认为保险丝的熔化时间的方差为144($\alpha=0.10$).

解 提出假设 H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2=144$，H_1: $\sigma^2\neq 144$，

则，拒绝域为：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

由于，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$s^2=121.82$，所以

$3.325<\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=7.614<16.919$，所以在显著水平 $\alpha=0.10$ 下接受 H_0，即保险丝的熔化时间的方差为144.

6. 为检验A, B两种药在血液中的反应，今在服A种药的8人和服B种药的6人服药两小时后，检验了他们血液中的药物浓度，得到如下数据：

A种药的浓度：1.23, 1.42, 1.41, 1.62, 1.55, 1.51, 1.60, 1.76,

B种药的浓度：1.76, 1.41, 1.87, 1.49, 1.67, 1.81.

设A, B两种药在血液中的浓度均服从正态分布，且方差相等，那么可否认为这两种药在血液中的浓度相同($\alpha=0.10$)?

解 提出假设 H_0: $\mu_1-\mu_2=0$, H_1: $\mu_1-\mu_2\neq 0$,

则，拒绝域为：$\left|\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

由于，$\alpha=0.1$，所以，$t_{\alpha/2}(12)=t_{0.05}(12)=1.7823$,

而，$\overline{x}=1.5125$，$\overline{y}=1.6683$，$s_1^2=0.0258$，$s_2^2=0.0335$，$s_w^2=0.029$，所以

$$\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\right|=\left|\frac{1.5125-1.6683}{\sqrt{0.029(1/8+1/6)}}\right|=1.694<1.7823$$

所以在显著水平$\alpha=0.10$下接受H_0，即认为这两种药在血液中的浓度相同.

7. 为比较在不同季节出生的女婴体重的差异，从某年12月和6月出生的女婴中各随机地取了6名与10名，测得体重(单位: g)如下：12月: 3520，2960，2560，2960，3260，3960，6月：3220, 3220, 3760, 3000, 2920, 3740, 3060, 3080, 2940, 3060. 设新生女婴体重服从正态分布，试问冬、夏两季新生女婴体重的方差是否不同($\alpha=0.05$)?

解 提出假设 $H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2=1$, $H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2\neq1$,

则，拒绝域为：

$$\left|\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\right| \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1) \quad 或 \quad \left|\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\right| \geq F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)$$

由于，$\alpha=0.05$, 所以，$F_{0.975}(5,9)=1/6.68$, $F_{0.025}(5,9)=4.48$,

而，$\bar{x}=3203.33$，$\bar{y}=3200$，$s_1^2=241666.6$, $s_2^2=93955.6$,

所以

$$1/6.68<\left|\frac{s_1^{\ 2}/s_2^{\ 2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\right|=2.572<4.48$$

所以在显著水平$\alpha=0.05$下接受H_0，即认为冬、夏两季新生女婴体重的方差没有明显差别.

附表1

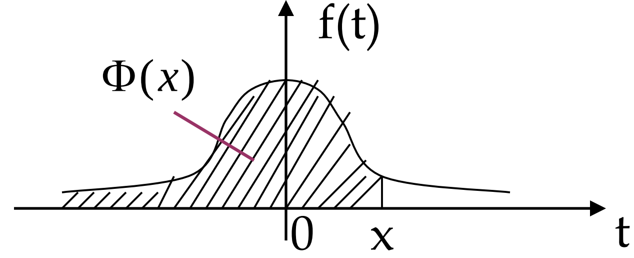
几种常用概率分布表

分 布	参 数	分布律或规律密度	期 望	方 差
0－1 分布	$0<p<1$	$P\{X=1\}=p$, $P\{X=0\}=1-p$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\geq 1$ $0<p<1$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ $k=0,1,2,\dots,n$	np	$np(1-p)$
Poisson 分布	$\lambda>0$	$P\{X=k\}=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,2,\dots$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$\theta>0$	$f(x)=\begin{cases}1/\theta\ e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$	θ	θ^2
正态分布	μ $\sigma>0$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

附表3

标准正态分布表

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad ,x\geq 0$$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72970	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87236	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062

附表3(续)

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99820
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99792	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
x	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
3	0.99865	0.99903	0.99931	0.99952	0.99966	0.99977	0.99984	0.99989	0.99993	0.99995

二维正态分布

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

则称(X, Y)服从参数为(μ_1, μ_2; σ_1^2,σ_2^2;ρ)的二维正态分布，简记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。

这里$\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho$ 都是常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0$, $|\rho|\le 1$。