班　级
学　号
姓　名

密　封　线

东 北 大 学 期 末 考 试 试 卷

2016　—2017　学年第　1　学期

课程名称：　数值分析

总分	一（1 - 8）	一（9-10）	二	三	四	五

一、解答下列各题：（每题 5 分，共 50 分）

1．$\sqrt{111}$ 的近似值 x 具有 5 位有效数字，求 x 的绝对误差限。

由于 $\sqrt{111}=10.5\ldots=0.105\ldots\times10^{2}$，所以 $|\sqrt{111}-x|\le 0.5\times10^{-3}$

2．设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，求 $\rho(A)$ 和 $Cond(A)_1$ 。

$\rho(A)=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$，$Cond(A)_1=21$。

3．x 为何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}9&x&3\\x&8&4\\3&4&3\end{pmatrix}$ 可分解为 GG^T，并求 $x=6$ 时的分解式，其中 G 为下三角矩阵。

由 A 正定可得，$0<x<8$，$x=6$ 时有：

$$A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&8&4\\3&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&&\\2&2&\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1\\&2&1\\&&1\end{pmatrix}$$

4．对线性方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2=1\\4x_1-3x_2=2\end{cases}$ 建立一个收敛的迭代格式，并说明收敛性。

$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{3}{4}x_2^{(k)}+\dfrac{1}{2}\\x_2^{(k+1)}=-\dfrac{2}{3}x_1^{(k)}+\dfrac{1}{3},k=0,1,2,\ldots\end{cases}$ 由于迭代矩阵行范数小于 1，所以收敛。

5．已知满足条件 $f(0)=0,f(1)=1,f(2)=-1,f(3)=2,f'(0)=0,f'(3)=1$ 的三次样条插值函数 $S(x)$ 在区间 $[1,2]$ 的表达式为 $S(x)=\dfrac{1}{7}(31x^3-130x^2+159x-53)$，试求 $S(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的表达式。

由已知可得 $S(0)=0,S'(0)=0,S(1)=1$，$S'(1)=-\dfrac{8}{7}$，所以在 $[0,1]$ 上有：

$$S(x)=-\frac{1}{7}x^2(22x-29)$$

6．求区间 [0，1] 上权函数为 $\rho(x)=1$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$。

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x-\frac{(x,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0=x-\frac{1}{2}$$

$$P_2(x)=x^2-\frac{(x^2,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0-\frac{(x^2,P_1)}{(P_1,P_1)}P_1=x^2-x+\frac{1}{6}$$

7．给定离散数据

x_i	−1	0	1	2
y_i	−2	1	3	2

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线。

由于 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$，所以 $\varphi_0=(1,1,1,1)^T,\varphi_1=(1,0,1,4)^T,f=(-2,1,3,2)^T$

正则方程组为 $\begin{cases}4a+6b=4\\6a+18b=9\end{cases}$，解得：$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{3}$

所以，拟合曲线为：$y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}x^2$

8．设 $f(x)=3x^3-5x^2+1$，求差商 $f[0,1],f[0,1,2,3],f[0,1,2,3,4]$。

$f[0,1]=-2$，$f[0,1,2,3]=3$，$f[0,1,2,3,4]=0$。

密 封 线

9．求 $Gauss$ 积分公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 的截断误差 R[f]。

由于 $Gauss$ 积分公式具有 3 次代数精度，所以

$$R[f]=\int_{-1}^{1} f(x)dx-[f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})]$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{-1}^{1} H_3(x)dx+\int_{-1}^{1} H_3(x)dx-[f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})]$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2(x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-1}^{1}(x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2(x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{135}，\quad \eta\in(-1,1)$$

10．求解初值问题 $\begin{cases} y'=ye^x & 1\le x\le 2 \\ y(1)=2 \end{cases}$ 的改进 Euler 方法是否收敛？为什么？

由于 $f(x,y)=ye^x$，所以 $|f(x,y)-f(x,\bar{y})|=|e^x(y-\bar{y})|\le e^2|y-\bar{y}|$，于是，改进 Euler 方法是收敛的。

二、（10 分）讨论求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。

令 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$ 得：$\rho(G)=2>1$，

所以，Gauss-Seidel 迭代法不收敛。

三、（12 分）已知方程 $x=\ln x+2$，

1. 证明此方程在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一根 α；

2. 建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 $x_0\in[e,2e]$ 都收敛，说明收敛理由和收敛阶。

3. 若取初值 $x_0=e$，用此迭代法求精度为 $\varepsilon=10^{-5}$ 的近似根，需要迭代多少步？

1.记 $f(x)=x-\ln x-2$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0,\ (x>1)$

又由于 $f(e)=e-3<0,\ f(2e)=2e-\ln 2-3>0$

所以，方程在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一根 α，而且 $\alpha\in(e,2e)$。

2．建立迭代格式：$x_{k+1}=\ln x_k+2,\ k=0,1,2,\ldots$，迭代函数为 $\varphi(x)=\ln x+2$

由于对任何 $x\in[e,2e]$ 有：$e<3\le\varphi(x)\le\ln 2+3<2e$，而且 $|\varphi'(x)|=\frac{1}{x}\le\frac{1}{e}<1$

所以，对任意初值 $x_0\in[e,2e]$ 都收敛。

又由于 $\varphi'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\neq 0$，所以收敛阶等于 1。

3．由于 $x_1=3,\ L=\frac{1}{e}$，所以

$$k\ge\ln\frac{(1-L)\varepsilon}{x_1-x_0}\div\ln L\approx 10.704$$

即，需要迭代 11 步。

密

封

线

四、（16 分）

1．确定参数 A_0,A_1,A_2,x_1，使求积公式 $\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx\approx A_0f(-1)+A_1f(x_1)+A_2f(1)$ 具有尽可能高的代数精度，并问代数精度是多少？

2．利用复化 Simpson 公式 S_n 计算计算定积分 $I=\int_0^1 e^x dx$，若使 $|I-S_n|<\varepsilon=10^{-4}$，问应取 n 为多少？并求此近似值。

1．由 $A_0+A_1+A_2=\dfrac{2}{3},-A_0+A_1x_1+A_2=0,\ \ A_0+A_1x_1^2+A_2=\dfrac{2}{5},$

$-A_0+A_1x_1^3+A_2=0,$ 可得：$A_0=A_2=\dfrac{1}{5},A_1=\dfrac{4}{15},x_1=0$，具有 3 次代数精度。

2．$n\ge\sqrt[4]{\dfrac{e}{2880\times10^{-4}}}\approx1.75$，所以取 $n=2$。

$$I\approx S_2=\frac{1}{12}(e^0+e+2e^{0.5}+4e^{0.25}+4e^{0.75})=1.7183188$$

五、（12 分）已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases}y'=f(x,y), & x\in[a,b]\\ y(a)=\alpha\end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{3}(k_1+\lambda k_2)\\ k_1=f(x_n,y_n)\\ k_2=f(x_n+\alpha h,y_n+\beta hk_1)\\ y_0=\alpha\end{cases}$$

1．确定参数 λ,α,β，使差分公式的阶尽可能高，并指出差分公式的阶。

2．用此差分公式求解初值问题 $\begin{cases}y'=-5y, & 0\le x\le2\\ y(0)=0\end{cases}$ 时，取步长 h=0.1,所得数值解是否稳定,为什么？

1．由于

$$k_2=f_n+h(\alpha\frac{\partial f_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)+\frac{h^2}{2}(\alpha^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\beta^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+O(h^3)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1+\lambda}{3}hf_n+\frac{\lambda h^2}{3}(\alpha\frac{\partial f_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)$$

$$+\frac{\lambda h^3}{6}(\alpha^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\beta^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+O(h^4)$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$=y_n+hf_n+\frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)$$

$$+\frac{h^3}{6}[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2+\frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y}+(\frac{\partial f_n}{\partial y})^2f_h]+O(h^4)$$

于是，当 $\lambda=2$，$\alpha=\dfrac{3}{4},\beta=\dfrac{3}{4}$ 时，差分公式的阶最高，是 2 阶方法。

2．带入试验方程有：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}[-5y_n-10(y_n+\frac{3h}{4}(-5y_n)]$$

$$=(1-5h+\frac{25}{2}h^2)y_n$$

$h=0.1$ 时，由于 $y_{n+1}=0.625y_n$，所以，所得数值解是稳定的。