东北大学 2020-2021 学年

春季学期

线性代数(闭卷)

答题纸

条码粘贴处

姓名:______________________

学号:______________________

班级:______________________

考场:______________________

注意事项：

1. 答卷前，考生请认真核对条形码框内的所有个人信息，确认无误并签名。
2. 主观题请使用黑色签字笔作答，书写应工整、清晰。
3. 请按题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在试卷、草稿纸上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破。考试结束后请将答题卡、试卷一并上交。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

一

1. $\begin{vmatrix} 2a_{11}+3a_{21} & a_{11} & 3a_{31} \\ 2a_{12}+3a_{22} & a_{12} & 3a_{32} \\ 2a_{13}+3a_{23} & a_{13} & 3a_{33} \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & a_{31} \\ a_{22} & a_{12} & a_{32} \\ a_{23} & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = -18$。

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，有

$\begin{bmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1+x_2 \\ x_3 & x_3+x_4 \end{bmatrix}$，于是 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

3. $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \end{bmatrix}$，当 2 与 3 行两行成比例时，

$R(A)=2$，$\dfrac{-21}{\lambda-10} = \dfrac{\lambda+12}{5} = \dfrac{3}{1}$，解得 $\lambda = 3$。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

二

1. 由 A 是正交矩阵，则 $(a,-\frac{3}{7},\frac{2}{7})$，$(-\frac{3}{7},\frac{2}{7},d)$ 都是单位向量，解得 $a=\pm\frac{6}{7}$，$d=\pm\frac{6}{7}$。又向量 $(a,-\frac{3}{7},\frac{2}{7})$ 与 $(-\frac{3}{7},\frac{2}{7},d)$ 正交，得 $a=-\frac{6}{7}$，$d=-\frac{6}{7}$。再由列向量两两正交，得 $b=-\frac{2}{7}$，$c=\frac{3}{7}$。

2. 由条件知 A 的特征值为：0，-2，-2。$A+kE$ 的特征值为 k，$-2+k$，$-2+k$。因为 $A+kE$ 是正定矩阵，所以特征值都大于 0，得 $k>2$。

3. 若 $k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0$，由于 A 可逆，得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$，故 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

三

1. 任取 $k \in R$ 和 V 中的两个元素 $f(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x$，$g(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x$，则

$f(x)+g(x) = (a_1+a_2)x^3 + (b_1+b_2)x^2 + (c_1+c_2)x \in V_1$，

$kf(x) = ka_1x^3 + kb_1x^2 + kc_1x \in V_1$，故 V_1 是 V 的子空间。

2. 由 $f(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2) = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ 和 $f(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$，可解得 $f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$，$f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2$。线性变换在基 $B=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ 的下矩阵为 $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，

$f(2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2) = 2f(\varepsilon_1) - 3f(\varepsilon_2) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. $T(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} + 3E_{21}$，

$T(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = E_{12} + 3E_{22}$，

$T(E_{21}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 2E_{11} + 4E_{21}$，

$T(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2E_{12} + 4E_{22}$。所以，

$T(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}) = (E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

四

$$[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3 \ \vdots\ \alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]=\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{bmatrix}$$

$\sim\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&0&a-4&0&3-3a&-(a-1)^2\end{bmatrix}$, 则当 $a\neq 4$ 且 $a\neq -2$ 时,

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示。

$$[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3 \ \vdots\ \beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]=\begin{bmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{bmatrix}$$

$\sim\begin{bmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&3a+6&4a+2\end{bmatrix}$，则 $a=1$ 或 $a=-2$ 时，

β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。所以 $a=1$。

五

由 $\begin{cases}(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27\\ 2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0\end{cases}$，解此方程组得

$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$

六

设 k 年后三家公司客户数分别为 x_k， y_k， z_k， $k+1$ 年后三家公司客户数分别为 $\begin{cases}x_{k+1}=0.8x_k+0.1y_k+0.1z_k\\ y_{k+1}=0.1x_k+0.7y_k+0.2z_k\\ z_{k+1}=0.1x_k+0.2y_k+0.7z_k\end{cases}$，

从而 $\begin{bmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\\z_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.1&0.2&0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{bmatrix}$，

得到 $\begin{bmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.1&0.2&0.7\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}$，

所以，$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.1&0.2&0.7\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}9\\4\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.467\\6.079\\6.454\end{bmatrix}$。

3 年后三家公司分别有客户 7.467 千万，6.079 千万和 6.454 千万。

七

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_1-\alpha_2$，

$\alpha_1-\alpha_3$ 是对应齐次线性方程组线性无关的解。所以 $R(A)\le 2$。系数矩

阵 A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}=-1$，所以 $R(A)=2$。

$$[A\vdots\beta]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&b+4a-5&4-2a\end{bmatrix}$$

因此，$a=2$，$b=-3$。

八

由 $|A|=\begin{vmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{vmatrix}=0$，得 $k=1$。可解得 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=0$，

$\lambda_3=1$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$，对应的齐次线性方程组 $-Ax=0$ 的系数矩阵

$$[-0E-A]=\begin{bmatrix}-3&-2&2\\1&-1&-1\\-4&-1&3\end{bmatrix}$$

的秩为 2，因此基础解系中向量的个数为 1 个，所以矩阵 A 不能对角化。

九

因为 $R(A)=n$，齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解。$x^TA^TAx=\|Ax\|\ge 0$，

当且仅当 $x=0$ 时，$\|Ax\|=0$，所以 A^TA 为正定矩阵，$R(A^TA)=n$，齐

次线性方程组 $A^TAx=0$ 只有零解。