学院______ 班级______ 学号______ 姓名______

密 封 线

东北大学考试试卷（A 闭卷）

2021—2022 学年 秋 季学期

课程名称：线性代数

总分	一	二	三	四	五	六	七	八	九

一.（每题 6 分，共 18 分）

1. 若行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求行列式$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -10a_{13} & -2a_{12} \\ -3a_{21} & 5a_{23} & a_{22} \\ 9a_{31} & -15a_{33} & -3a_{32} \end{vmatrix}$的值.

2. 已知 3 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，请写出 3 阶初等矩阵 $E(2+3(4))$，并计算 $AE(2+3(4))$.

3. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$的秩，并找出一个最高阶非零子式.

二.（每题 6 分，共 18 分）

1. 当t取何值时，二次型
$$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-5x_3^2-2tx_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$$
为负定二次型.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_i\in R^n$，$i=1,2,3$. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，试判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性相关性.

3. 对 R^3 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^T$ 定义二元实函数 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$，试判断$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$是否构成$R^3$上的内积.

三.（每题 6 分，共 18 分）

1. 设A为3阶负定矩阵，A^*为矩阵A的伴随矩阵，满足$A^{*4}-5A^{*2}+4E=O$，其中E为3阶单位矩阵，求行列式$|A^*-2E|$的值.

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 2 & y \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$相似，求参数$x,y,z$.

3. 验证映射$\mathscr{A}(f(x))=f(x+1)$是线性空间$R[x]_3$的线性变换，并求出该线性变换在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=x$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=x^2$下的矩阵。

四.（ 8 分）

已知向量组
$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-2,-3,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1,-4,5)^T,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,-3,-6,-1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,-2,-1,-3)^T,$$
现有集合
$$S=\{\boldsymbol{\beta}\,|\,[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i]=0, i=1,2,3,4, \boldsymbol{\beta}\in R^5\},$$
其中$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+\cdots+x_5y_5$是$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_5)^T$与$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_5)^T$的内积.

（1）证明：S 是 R^5 的子空间;

（2）求出子空间 S 的一个基和维数.

学院______ 班级______ 学号______ 姓名______

密 封 线

五.（ 8 分）

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,x,4)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,3)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7)^T$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3)^T$ ，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,2)^T$ ，$\boldsymbol{\beta}_3=(2,y,4)^T$ 线性表示，现已知 $3\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求参数 x 和 y.

六.（ 8 分）

利用行列式理论或向量组线性相关性理论判断空间中四个点 $(2,1,1)^T$，$(1,2,4)^T$，$(6,3,1)^T$，$(8,5,3)^T$ 是否共面？请给出理由.

七.（ 8 分）

用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$ 为规范形，并给出所用的可逆线性变换. 进一步地，试判断在该二次型矩阵的特征值中正、负特征值的个数.

八.（ 8 分）

判断实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的正定性.（注：至少给出两种判别方法）

九.（ 6 分）

设 A 为 n 阶不可逆方阵，现存在一个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和非负整数 s（$s<n$），满足 $A^{s+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，但是 $A^s\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

（1）试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, A^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,A^s\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关性；

（2）当 $s=n$ 时，是否存在满足 $A^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，但是 $A^n\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 的向量 $\boldsymbol{\alpha}$.