东北大学 2020-2021 学年

秋季学期

线性代数(闭卷)

答题纸

条码粘贴处

姓名:____________________

学号:____________________

班级:____________________

考场:____________________

注意事项：

1. 答卷前，考生请认真核对条形码框内的所有个人信息，确认无误并签名。
2. 主观题请使用黑色签字笔作答，书写应工整、清晰。
3. 请按题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在试卷、草稿纸上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破。考试结束后请将答题卡、试卷一并上交。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

一

1.

$$D=\begin{vmatrix}1+x+x^2+x^3 & 0 & 0 & 0\\ x & 1 & -1 & -1\\ x^2 & -1 & 1 & -1\\ x^3 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1+x+x^2+x^3)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$=-4(1+x+x^2+x^3)$。

2.

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

3. $A^6=EA^6=AA^{11}=E$，故 $A^{11}=A^{-1}$，而 A 为正交矩阵，

$A^{-1}=A^T$，所以，$A^{11}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

二

1. 设有一组数 k_1，k_2，k_3，使得

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_2+2\alpha_3)+k_3(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=0$，即：

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+3k_2-2k_3)\alpha_2+(2k_2+k_3)\alpha_3=0$。由于，

α_1，α_2，α_3 线性无关，从而有方程组

$\begin{cases}k_1+k_3=0\\ k_1+3k_2-2k_3=0\\ 2k_2+k_3=0\end{cases}$，其系数行列式为 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=9$，从而

齐次线性方程组只有零解，故 $\alpha_1+\alpha_2$，$3\alpha_2+2\alpha_3$，

$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关。

2. 先正交化：

$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$，

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$。

再单位化：

$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$，

$\varepsilon_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$。

3. 由于 A 与 B 相似，矩阵 B 的特征值为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，

从而 $B^{-1}-E$ 的特征值为 1, 2, 3, 4。所以，$|B^{-1}-E|=24$。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

三

1. A 与 B 的秩相同，所以 A 与 B 等价。A 与 B 有相同的特征值，且为实对称矩阵，A 与 B 相似，且合同。

2. W 的一组基为：$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，维数为 $n-1$。

3. 将后一组基写成前一组基的线性组合：

$\begin{cases}F_1=2E_1+E_2+E_3\\ F_2=2E_2\\ F_3=E_1+6E_2+3E_3\end{cases}$，

故 $(F_1,F_2,F_3)=(E_1,E_2,E_3)\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 6\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

四

由 $R(B)=4$，得 $R(B^*)=4$，从而 B^* 可逆。由 $R(A)=3$，得 $R(A^*)=1$，从而 $R(A^*B^*)=R(A^*)=1$。

五

设该衣服小号，中号，大号和加大号的销售量分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，由题意得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=13 \\ 22x_1+24x_2+26x_3+30x_4=320 \\ x_1-x_3+x_4=0 \\ 22x_1-26x_3+30x_4=0 \end{cases},$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 22 & 24 & 26 & 30 & 320 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 22 & 0 & -26 & 30 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

所以方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=9 \\ x_3=2 \\ x_4=1 \end{cases}$。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

六

由 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，知 $B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\alpha_1=-2\alpha_1$，故 α_1 是 B 的属于特征值-2 的一个特征向量。

B 的全部特征值为：-2, 1, 1。B 的属于特征值-2 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 k_1 是不为 0 的任意常数。因为 A 是实对称矩阵，所以 B 也是实对称矩阵。设 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 为 B 的属于特征值 1 的任意一个特征向量。因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，所以 $x_1-x_2+x_3=0$，解得该方程组的基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，故属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_2，k_3 不全为 0 的任意常数。

七

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，

$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$。$\det(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0$，得 $a=3b$。

$\det(\alpha_1,\alpha_2,\beta_3)=\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=0$，得 $b=5$，$a=15$。

主观题答题区

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

八（1）设有一组数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，使得 $x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n=0$，以 A^{n-1} 左乘上式两边，得 $x_1\xi_n=0$。由于 $\xi_n\neq 0$，故 $x_1=0$。类似地，可得 $x_2=x_3=\cdots=x_n=0$，因此，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关。

（2）由题设

$$A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_{n-1},0)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix},$$

因为向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关，所以矩阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 可逆，从而矩阵 A 与 $B=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$ 矩阵相似，$R(A)=R(B)=n-1$，且 A 的特征值都为 0，A 的线性无关的特征向量仅有 1 个，不能相似于对角阵。

九

方程组（2）的未知量个数大于方程的个数，故有无穷多个解。因为方程组（1）和（2）同解，所以方程组（1）的系数矩阵的秩小于 3。

$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix}$，从而 $a=2$。

此时，方程组（1）的系数矩阵可化为 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是方程组（1）的一个基础解系。将解带入到方程组（2）中，可得 $b=1$，$c=2$ 或 $b=0$，$c=1$。

当 $b=1$，$c=2$ 时，对方程组（2）的系数矩阵进行初等行变换，

$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，此时，方程组（1）和（2）同解。

当 $b=0$，$c=1$ 时，对方程组（2）的系数矩阵进行初等行变换，

$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，此时，方程组（1）和（2）的解不同。

因此 $a=2$，$b=1$，$c=2$。