学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

东北大学考试试卷（A 闭卷）

2019 — 2020　学年　秋　季学期

课程名称：　　线性代数

总分	一	二	三	四	五	六	七	八	九

一.（每题 3 分，共 9 分）

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\1&3&1&4\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$，求 D 的第二行各元素代数余子式之和.

2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

3. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^3+A^2-A-E=O$，求行列式 $|A+2E|$ 的值.

二.（每题 3 分，共 9 分）

1. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$ 的秩和正惯性指数.

2. 设 λ_1 和 λ_2 是 3 阶矩阵 A 的两个不同特征值，已知矩阵 λ_1E-A 的秩等于 1，试判断矩阵 A 是否相似于对角矩阵，请给出理由.

3. 求 $\mathbf{R}[x]_3$ 中向量 $f(x)=x^2-2x+3$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=x-1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=x^2-x-1$ 下的坐标.

三.（每题 3 分，共 9 分）

1. 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,1,1)^T$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3=(0,0,1)^T$ 的过渡矩阵.

2. 求线性空间 $V=\{\begin{pmatrix}0&a\\b&c\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$ 的一个基和维数.

3. 取定两个实函数 $f_1=e^{ax}\cos(bx)$，$f_2=e^{ax}\sin(bx)$，它们生成实函数空间的二维子空间 $V=L(f_1,f_2)$. 求 V 中微分运算 $\mathscr{D}$ 在基 f_1，f_2 下的矩阵.

四.（4 分）

若矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似，求 $R(A-2E)+R(A-E)$.

五.（4 分）

已知斐波那契数列以如下递推的方法定义：$F_0=1$，$F_1=1$，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\ (n\geq 1)$.

试求 2 阶矩阵 A，使得 $\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{pmatrix}$；进一步求斐波那契数列的通项公式.

六.（4 分）

已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$，使得向量组 $\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{x}$，$A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关，且满足 $A^3\boldsymbol{x}=3A\boldsymbol{x}-2A^2\boldsymbol{x}$，求矩阵 A 的特征值.

七.（4 分）

设 3 阶实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$，已知 $|a_{11}+a_{22}+a_{33}|<|a_{11}|+|a_{22}|+|a_{33}|$，其中 $|\ |$ 为绝对值函数，试判断二次型 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ 的正定性.

八.（4 分）

设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&0&-4\\0&4&0\\-4&0&5\end{pmatrix}$，求一个正定矩阵 B，使 $A=B^2$.

九.（3 分）

求证：两个 n 元齐次线性方程组同解的充要条件是它们系数矩阵的行向量组等价.

A 卷

学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

一.

1. 解：$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\1&1&1&1\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-14$.

2. 解：$\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0&0\\-2&-1&-2&0&1&0\\4&3&3&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&9&4\\0&1&0&-2&-5&-2\\0&0&1&-2&-7&-3\end{pmatrix}$$

所以$\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&9&4\\-2&-5&-2\\-2&-7&-3\end{pmatrix}$.

3. 解：由 $A^3+A^2-A-E=O$ 可知，矩阵 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$．所以特征值 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

所以当矩阵 A 相似于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $A=E$ 时，$|A+2E|=27$；

当矩阵 A 相似于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$|A+2E|=9$；

当矩阵 A 相似于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$|A+2E|=3$；

当矩阵 A 相似于 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，即 $A=-E$ 时，$|A+2E|=1$.

二.

1. 解：经过配方，

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2)^2-3x_2^2+x_3^2$，所以二次型的秩等于 3，而正惯性指数等于 2.

2. 解：因为矩阵 λ_1E-A 的秩等于 1，所以特征值 λ_1 有两个线性无关特征向量，显然，特征值 λ_2 只有一个线性无关特征向量，于是矩阵 A 有 3 个线性无关特征向量，因此矩阵 A 能够相似于对角矩阵.

3. 解：在取坐标的同构映射下，问题可以转化为 $\beta=(3,-2,1)^T$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(-1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,-1,1)^T$ 下的坐标问题.

根据 $\begin{pmatrix}1&-1&-1&3\\0&1&-1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ 可知，

原问题的坐标为 $(3,-1,1)^T$.

三.

1. 解：因为 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以有

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

于是过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. 解：因为 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in V$，并且线性无关，同时对 $\forall\begin{pmatrix}0&a\\b&c\end{pmatrix}\in V$，都有

$\begin{pmatrix}0&a\\b&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 构成线性空间 V 的一组基，同时线性空间 V 是 3 维的.

3. 解：因为

$\mathscr{D}(e^{ax}\cos(bx))=ae^{ax}\cos(bx)-be^{ax}\sin(bx)$，

$\mathscr{D}(e^{ax}\sin(bx))=ae^{ax}\sin(bx)+be^{ax}\cos(bx)$，

所以

$\mathscr{D}(f_1,f_2)=(f_1,f_2)\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$，从而微分运算 $\mathscr{D}$ 在基 f_1,f_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$.

A 卷

学　院
班　级
学　号
姓　名

密

封

线

四．解：因为矩阵 A 与矩阵 B 相似，所以存在可逆矩阵 P，满足 $A=P^{-1}BP$．于是

$$\begin{aligned}R(A-2E)+R(A-E)&=R(P^{-1}BP-2E)+R(P^{-1}BP-E)\\&=R(P^{-1}(B-2E)P)+R(P^{-1}(B-E)P)\\&=R(B-2E)+R(B-E)\end{aligned}$$

由于 $B-2E=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$，其秩等于 3，而

$B-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，其秩等于 1，所以

$R(A-2E)+R(A-E)=4$.

五．解：由 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ 可得

$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{pmatrix}$，即矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

进一步，由 $\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{pmatrix}$ 可推出

$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

因为 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n=$

$$\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2}&\frac{1-\sqrt5}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\frac{1+\sqrt5}{2})^n&0\\0&(\frac{1-\sqrt5}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2}&\frac{1-\sqrt5}{2}\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

所以

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}(\frac{1+\sqrt5}{2})^{n+1}-\frac{1}{\sqrt5}(\frac{1-\sqrt5}{2})^{n+1}.$$

六．解：因为

$A(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x},A^2\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x},A^2\boldsymbol{x},A^3\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x},A^2\boldsymbol{x},3A\boldsymbol{x}-2A^2\boldsymbol{x})$

所以有

$$A(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x},A^2\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x},A^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}.$$

因为向量组 $\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{x}$，$A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关，所以矩阵 A 相似于矩阵 $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$，进而它们有相同的特征值．由于 $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$，所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$.

七．解：

由 $|a_{11}+a_{22}+a_{33}|<|a_{11}|+|a_{22}|+|a_{33}|$，可知 a_{11}，a_{22}，a_{33} 中一定存在两个非零数，满足一个为正数，一个为负数．不妨设 $a_{11}>0$，$a_{22}<0$.

此时在二次型

$$f=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

中，一方面，若取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，则 $f=a_{11}>0$；另一方面，若取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，则 $f=a_{22}<0$．因此，二次型既不正定，也不负定.

八．解：经计算，矩阵 A 可正交合同对角化为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}^T A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix},$$

于是

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}^T.$$

若令

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix},$$

那么矩阵是正定矩阵，且满足 $B^2=A$.

九．证明：

设 $A_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $B_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，那么

$A_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$B_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}A_{m\times n}\\B_{s\times n}\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ 同解，于是

$R(A_{m\times n})=R(B_{s\times n})=R(\begin{pmatrix}A_{m\times n}\\B_{s\times n}\end{pmatrix})$，进而可以证明出 $A_{m\times n}$ 与 $B_{s\times n}$ 的行向量组等价.

反过来，若 $A_{m\times n}$ 与 $B_{s\times n}$ 的行向量组等价，则存在矩阵 P 和矩阵 Q，使得 $PA=B$ 和 $QB=A$，显然，$A_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $B_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.