学院
班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学考试试卷（A闭卷）

2018—2019 学年 春 季学期

课程名称：线性代数

总分	一	二	三	四	五	六	七

得分：

一. 计算题（每题 3 分，共 24 分）

1. 已知齐次线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1-3x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$有非零解，求$\lambda$的值。

解 由于$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=5\lambda-4=0$ 2 分

所以$\lambda=4/5$. 3 分

2. 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解 由于$(A\vdots E)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 21 & -10 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2 分

所以$A^{-1}=\begin{pmatrix} 21 & -10 & -13 \\ -8 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3 分

3. 求向量组$\alpha_1=(1,1,2)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T$，$\alpha_3=(3,2,5)^T,\alpha_4=(1,0,1)^T$的秩.

解 由于$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2 分

所以，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩等于 2. 3 分

4. 问a,b为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+3x_3=2 \\ x_1+2x_2+ax_3=b \end{cases}$有无穷多解？并求其通解.

解 由于$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & a & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & b-1 \end{pmatrix}$

所以，当$a=5,b=1$时，方程组有无穷多解. 2 分

其通解为：$\begin{cases} x_1=1-3k \\ x_2=-k \\ x_3=k \quad k\in R \end{cases}$ 3 分

5. 判定矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$是否与对角矩阵相似？说明原因.

解 由于$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$.

$=(\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda+4)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-4)$ 2 分

所以，矩阵A的特征值为-1, 1, 4 互不相同，A与对角矩阵相似. 3 分

学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$ 是否正定？为什么？。

解　由配方法可得：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^2$　　2 分

由于正惯性指数等于 3，所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定.　　3 分

7. 给出线性空间 $V=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in R\}$ 的维数和一组基.

解　线性空间 V 是 3 维线性空间　　**1 分**

V 的一组基为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$　　**3 分**

8. 在线性空间 $R[x]_3$ 中，线性变换 T 满足，$T(x^2)=x^2+2x+2$，$T(x^2+x)=x^2+3x+3$，$T(x^2+x+1)=x^2+3x+4$，求 $T(2x^2+3x+5)$.

解　由于 $2x^2+3x+5=-x^2-2(x^2+x)+5(x^2+x+1)$　　2 分

所以 $T(2x^2+3x+5)=-(x^2+2x+2)-2(x^2+3x+3)+5(x^2+3x+4)$

$$=2x^2+7x+12$$　　3 分

得分：

二.（4 分）某种动物所能达到的最大年龄为 3 岁，动物从第二年起开始繁殖后代，经过长期统计，第二年和第三年的繁殖率分别为 3 和 5 只。第一年的动物有 60%能活到第二年，第二年的动物有 40%能活到第三年。设农场现有三个年龄的动物各 1000 只，问 2 年后农场三个年龄的动物各有多少只？

解　记 k 年后三个年龄组的动物只数分别为 x_k,y_k,z_k，则有

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{pmatrix}，且 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$　　2 分

所以，
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8000 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8000 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3800 \\ 4800 \\ 240 \end{pmatrix}$$　　4 分

即，2 年后农场有 1 岁动物 3800 只，2 岁动物 4800 只，3 岁动物 240 只。

得分：

三.（4 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 使得 PA 为阶梯型矩阵.

解　由于 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　2 分

所以，$P=E[3+2(1)]E[3+1(-1)]E[2+1(-2)]$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$　　4 分

学　院
班　级
学　号
姓　名

密

封

线

得分：

四．（4 分） 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,2)^T,\alpha_2=(2,3,1,3)^T,\alpha_3=(1,1,2,a)^T$ 线性相关，求 a 的值和此向量组的一个极大线性无关向量组。

解　由与 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\-1&1&2\\2&3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\0&0&0\\0&0&a-1\end{pmatrix}$　　2 分

所以，$a=1$，α_1,α_2 是一个极大线性无关向量组。　　4 分

得分：

五．（4 分） 设 $R(A)=1$，$\alpha_1=(1,1,2)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T$，$\alpha_3=(3,2,1)^T$ 都是线性方程组 $Ax=\beta$ 的解, 求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

解　由于 $R(A)=1$, 所以 $Ax=0$ 的解空间是 2 维的，其基础解系可取为

$$\beta_1=\alpha_2-\alpha_1=(1,0,1)^T,\beta_2=\alpha_3-\alpha_1=(2,1,-1)^T$$　　2 分

所以，线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为:

$$x=\alpha_1+k_1\beta_1+k_2\beta_2,\ k_1,k_2\in R$$　　4 分

得分：

六．（5 分） 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩等于 1，且 $|A-E|=0$，向量 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-1,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,-1)^T$，$\alpha_4=(0,1,-1)^T$ 都是 A 的特征向量，求矩阵 A.

解　由已知可得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=0$　　1 分

由于 A 的不同特征值的特征向量正交，所以 $\alpha_1=(1,1,1)^T$ 是属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量.　　2 分

将 α_2,α_3 规范正交化得 $\beta_2=(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)^T$，$\beta_3=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6})^T$　　3 分

将 α_1 单位化得正交矩阵：$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}^T=\frac13\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$　　5 分

得分：

七．（5 分） 设 $Q=\frac13\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&2&-2\\-2&1&2\end{pmatrix}$，若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经过正交变换 $x=Qy$ 变成标准形 $f=y_1^2-y_2^2$，求 $f(1,2,1)$ 的值。

解　由于，$x=Qy$，所以 $x=(1,2,1)^T$ 时，有

$$y=Q^Tx=\frac13\begin{pmatrix}2&-1&-2\\2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/3\\7/3\\-1/3\end{pmatrix}$$　　3 分

所以，$f(1,2,1)=\frac49-\frac{49}{9}=-5$　　5 分