东北大学《数值分析》2016-2017学年第一学期期末试卷甲

一、填空题（每小题3分，共30分）

1．有3个不同节点的高斯求积公式的代数精度是______次的.

2．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\ -4\\ 2\end{pmatrix}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=$ ____.，$\|\boldsymbol{x}\|_1=$ ______.

3．已知 $y=f(x)$ 的均差（差商）$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{14}{3}$，$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{15}{3}$，$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{91}{15}$，$f[x_0,x_2,x_3]=\dfrac{8}{3}$，那么均差 $f[x_4,x_2,x_3]=$_________.

4．已知 n=4 时 Newton－Cotes 求积公式的系数分别是：$C_0^{(4)}=\dfrac{7}{90},C_1^{(4)}=\dfrac{16}{45},C_2^{(4)}=\dfrac{2}{15}$,则 $C_3^{(4)}=$_______ .

5．解初始值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的改进的 Euler 方法是_______阶方法；

6．求解线性代数方程组 $\begin{cases}5x_1-3x_2-0.1x_3=3\\ -2x_1+6x_2+0.7x_3=2\\ x_1+2x_2+3.5x_3=1\end{cases}$ 的高斯—塞德尔迭代公式为_________，若取 $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)}=(1,-1,1)$，则 $\vec{\boldsymbol{x}}^{(1)}=$_______________ .

7．求方程 $x=f(x)$ 根的牛顿迭代格式是 ___________.

8．$\ell_0(x),\ \ell_1(x),\cdots,\ \ell_n(x)$ 是以整数点 $x_0,\ x_1,\cdots,\ x_n$, 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n}x_k\ell_j(x_k)=$_________.

9．解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的简单迭代格式 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{Bx}^{(k)}+\boldsymbol{g}$ 收敛的充要条件是_________.

10．设 $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1, f(2)=5$，则 $f(x)$ 的三次牛顿插值多项式为_________________，其误差估计式为__________________.

二、综合题（每题10分，共60分）

1．求一次数不超过4次的多项式 $p(x)$ 满足：$p(1)=15$，$p'(1)=20$，$p''(1)=30$ $p(2)=57$，$p'(2)=72$.

2．构造代数精度最高的形式为$\int_0^1 xf(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{2}) + A_1 f(1)$ 的求积公式，并求出其代数精度.

3．用 Newton 法求方程$x - \ln x = 2$在区间$(2,\infty)$内的根，要求$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < 10^{-8}$.

4．用最小二乘法求形如$y = a + bx^2$的经验公式拟合以下数据：

x_i	19	25	30	38
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3

5．用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

6 试用数值积分法建立求解初值问题$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$的如下数值求解公式

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}),$$

其中$f_i = f(x_i, y_i), \quad i = n-1, n, n+1$.

三、证明题（10 分）

设对任意的x，函数$f(x)$的导数$f'(x)$都存在且$0 < m \le f'(x) \le M$，对于满足$0 < \lambda < \frac{2}{M}$的任意$\lambda$，迭代格式$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$均收敛于$f(x) = 0$的根$x^*$.

参考答案

一、填空题

1．5； 2. $8,9$； 3. $\dfrac{91}{15}$； 4. $\dfrac{16}{45}$； 5. 二；

6. $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (3+3x_2^{(k)}+0.1x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (2+2x_1^{(k+1)}-0.7x_3^{(k)})/6 \\ x_3^{(k+1)} = (1-x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)})*2/7 \end{cases}$， **(0.02，0.22，0.1543)**

7. $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - f(x_k)}{1-f'(x_k)}$； 8. x_j； 9. $\rho(B)<1$；

10. $\dfrac{1}{6}x^3 + x^2 - \dfrac{1}{6}x$, $f^{(4)}(\xi)(x+1)x(x-1)(x-2)/24 \quad \xi\in(-1,2)$

二、综合题

1．差商表：

1	15				
		20			
1	15		15		
		20		7	
1	15		22		1
		42		8	
2	57		30		
		72			
2	57				

$$p(x)=15+20(x-1)+15(x-1)^2+7(x-1)^3+(x-1)^3(x-2)=5+4x+3x^2+2x^3+x^4$$

其他方法：

设 $p(x)=15+20(x-1)+15(x-1)^2+7(x-1)^3+(x-1)^3(ax+b)$

令 $p(2)=57$， $p'(2)=72$，求出 a 和 b.

2．取 $f(x)=1,x$，令公式准确成立，得：

$A_0+A_1=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}A_0+A_1=\dfrac{1}{3}$, $A_0=\dfrac{1}{3}$, $A_1=\dfrac{1}{6}$.

$f(x)=x^2$ 时，公式左右$=\dfrac{1}{4}$； $f(x)=x^3$ 时，公式左$=\dfrac{1}{5}$，公式右$=\dfrac{5}{24}$

∴ 公式的代数精度$=2$.

3．此方程在区间$(2,\infty)$内只有一个根s，而且在区间（2，4）内。设$f(x)=x-\ln x-2$

则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$， $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ，Newton 法迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\ln x_k-2}{1-1/x_k}=\frac{x_k(1+\ln x_k)}{x_k-1},\quad k=0,1,2,\cdots$$

取$x_0=3$，得$s\approx x_4=3.146193221$。

4． $\Phi = span\{1, x^2\}$，$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 19^2 & 25^2 & 30^2 & 38^2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}^T = \begin{bmatrix} 19.0 & 32.3 & 49.0 & 73.3 \end{bmatrix}$.

解方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3330 \\ 3330 & 3416082 \end{bmatrix}$，

解得：$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1.41665 \\ 0.0504305 \end{bmatrix}$

所以 $a = 0.9255577$， $b = 0.0501025$.

5．解 设

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法可求出 u_{ij} 和 l_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

解下三角方程组 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$

有 $y_1 = 5$， $y_2 = 3$， $y_3 = 6$， $y_4 = 4$.

再解上三角方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

得原方程组的解为 $x_1 = 1$， $x_2 = 1$， $x_3 = 2$， $x_4 = 2$.

6 解 初值问题等价于如下形式 $y(x) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x} f(x, y(x))dx$，

取 $x = x_{n+1}$，有 $y(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$，

利用辛卜森求积公式可得 $y_{n+1} \approx y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$.

三、证明题

证明　将 $f(x)=0$ 写成 $x = x - \lambda f(x) \quad \varphi(x)$ ，

由于 $\varphi'(x) = [x - \lambda f(x)]' = 1 - \lambda f'(x)$ ，所以 $|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| < 1$

所以迭代格式 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^* .