学 院
班 级
学 号
姓 名

密 封 线

东北大学考试试卷（A 闭卷）

2017 — 2018 学年第 一 学期

课程名称：线性代数

总分	一	二	三	四	五	六

得分：

一.（5 分） 已知 3 阶矩阵 A 满足 $R(\frac{1}{3}A+E)=2$ 和 $R(A-2E)=1$，E 为 3 阶单位矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，A^{-1} 为 A 的逆矩阵，试求行列式 $\left|A+A^*+A^{-1}\right|$ 的值.

解：因为 $R(\frac{1}{3}A+E)=2$，所以 $\lambda_1=-3$ 是矩阵 A 的一个特征值；因为 $R(A-2E)=1$，所以 $\lambda_2=\lambda_3=2$．于是，$|A|=(-3)\cdot 2\cdot 2=-12$．进而，矩阵 A^{-1} 有特征值 $-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$；矩阵 A^* 有特征值 4，-6，-6．

因此，矩阵 $A+A^*+A^{-1}$ 有特征值 $\frac{2}{3}$，$-\frac{7}{2}$，$-\frac{7}{2}$，

所以行列式 $\left|A+A^*+A^{-1}\right|=\frac{2}{3}\cdot(-\frac{7}{2})\cdot(-\frac{7}{2})=\frac{49}{6}$.

得分：

二.（5 分） 已知 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4\\ \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i, i=1,2,3,4$ 是 4 个线性无关的 n 维行向量. 问：矩阵 A 能否经过初等行变换化为矩阵 B？若能，请写出所用的初等矩阵；否则，请说明理由.

解：

矩阵 A 不能经过初等行变换化为矩阵 B.

因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，显然，矩阵 B 的行向量组是线性相关的，即矩阵 B 的行向量组是降秩的，但矩阵 A 是行满秩的，因此，矩阵 A 不能经过初等行变换化为矩阵 B.

得分：

三.（5 分）给定方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=4\\ -x_1+x_2-2x_3=2\\ \lambda x_1+x_2+x_3=3\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+2x_2+\mu x_3=2\end{cases}$，已知这两个方程组解集合的交集非空，试确定参数 λ 和 μ.

解：方法一

因为方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=4\\ -x_1+x_2-2x_3=2\\ x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$ 有唯一解 $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\\ x_3=-1\end{cases}$，

代入到其余两式可求出参数 $\lambda=3,\mu=1$.

方法二

因为两个方程组存在公共的解向量，所以方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=4\\ -x_1+x_2-2x_3=2\\ \lambda x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+2x_2+\mu x_3=2\end{cases}$ 有解.

增广矩阵可化为 $\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\ -1&1&-2&2\\ \lambda&1&1&3\\ 1&1&1&1\\ 1&2&\mu&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ 0&1&-2&3\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&3-\lambda\\ 0&0&0&\mu-1\end{pmatrix}$，

只有当 $\lambda=3,\mu=1$ 时，新的方程组才有解，进而原题中两个方程组才存在公共的解向量.

学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

得分：

四.（5 分）已知 3 阶矩阵 A 有特征值 6 和 9，其中矩阵 $9E-A$ 的秩等于 1. 向量 $\xi=(1,1,1)^T$ 是属于特征值 6 的一个特征向量，满足与特征值 9 的所有特征向量都正交.

求：矩阵 A，并分析满足上述条件的矩阵 A 唯一吗？

解：因为 $R(9E-A)=1$，所以特征值 9 有 2 个线性无关特征向量，不妨设为 η_1,η_2.

令 $P=(\xi,\eta_1,\eta_2)$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}$. 于是，$A=P\begin{pmatrix}6&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}P^{-1}$.

$$A=(9\xi-3\xi,9\eta_1,9\eta_2)(\xi,\eta_1,\eta_2)^{-1}=9E-(3\xi,\mathbf{0},\mathbf{0})(\xi,\eta_1,\eta_2)^{-1}$$

$$=9E-\begin{pmatrix}\xi^T\\\xi^T\\\xi^T\end{pmatrix}(\xi,\eta_1,\eta_2)(\xi,\eta_1,\eta_2)^{-1}=9E-\begin{pmatrix}\xi^T\\\xi^T\\\xi^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1&-1\\-1&8&-1\\-1&-1&8\end{pmatrix}.$$

所以，满足上述条件的矩阵 A 是唯一.

得分：

五.（5 分）已知 $\mathscr{A}$ 是所有 2 阶上三角矩阵组成的线性空间上的一个线性变换，满足 $\mathscr{A}(A)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}A$. 求一个上三角矩阵 M（$M\neq O$），使 M 及 $\mathscr{A}(M)$ 在基 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的坐标相同.

解：$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. 设 M 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$，

则 $\mathscr{A}(M)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2+2x_3\\x_3\end{pmatrix}$，

由坐标相等可知，$x_3=0$. 所以 $M=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&0\end{pmatrix}$，$k_1\neq0,k_2\neq0\in R$.

得分：

六.（5 分）现有四个点 A=$(1,0)^T$，B=$(-1,0)^T$，C=$(0,1)^T$，D=$(1,1)^T$，试利用矩阵秩理论判定该四点是否共圆？

解：设圆的方程为 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，将上述四点代入可形成如下方程组：

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

增广矩阵经过初等行变换可化为 $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\-1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\-1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，

因为增广矩阵的秩不等于系数矩阵的秩，因此，上述方程组无解，即该四点不共圆.