目 录

2020-2021 学年第二学期期末考试试卷 2
2020-2021 学年第二学期期末考试试卷参考答案 7
2018-2019 学年第二学期期末考试试卷 11
2018-2019 学年第二学期期末考试试卷参考答案 14
2017-2018 学年第二学期期末考试试卷 17
2017-2018 学年第二学期期末考试试卷参考答案 23
2016-2017 学年第二学期期末考试试卷 26
2016-2017 学年第二学期期末考试试卷参考答案 31
2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷 33
2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案 39
2015-2016 学年第二学期期末考试 B 卷 45
2015-2016 学年第二学期期末考试 B 卷参考答案 50
2014-2015 学年第二学期期末考试 A 卷 53
2014-2015 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案 59
2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷 66
2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案 70
2012-2013 学年第二学期期末考试 A 卷 76
2012-2013 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案 81

《高等数学（下）》

2020-2021 学年第二学期期末考试试卷

一、解答题（每空 3 分，共 15 分)

1.设$\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=26$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-30$，则$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$______

2、微分方程$xy'=3y(y-1),y(2)=\dfrac{2}{9}$的特解________

3. 设$u=x^3y^2z$，则$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}|(1,1,1)=$

4.直线l_1:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 与l_2:$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{k}$相互垂直，则常数 k=______

5．曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$上的点（1，1，1）的切线方程是_________.

二、(每题 5 分，共 10 分)

1.设$z=x^2e^{x+3y}$，求$dz|_{(1,1)}$

2.设曲面Σ：$x^2+y^2+z^2=a^3(a>0)$，取外侧，求$I=\oiint\limits_{\Sigma}y^2dzdx+zdxdy.$

三、(每题 6 分，共 18 分)

1．设$\varphi(u)$有连续导数，a,b 为常数，方程$x-az=\varphi(y-bz)$确定隐函数 $z=f(x,y)$求

$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. 求过直线 L：$\begin{cases} x+y+z=38 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$的一个平面 Π，使得原点到平面的距离最大

3. $\int_L y^2 ds$，式中 L 为摆线$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$位于$0\leqslant t\leqslant 2\pi$的部分

四、（每题 6 分，共 18 分）

1.设$f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$.计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 若二元函数$u=u(x,y)$的全微分是$du=(x^2-y^2)dx+(3y^2-2y+kxy)dy$,求常数 k 以及 u(x,y) 的表达式

3.计算累次积分 I=$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$

五、(6 分)

设区域 D:$x^2+y^2\leqslant 1$,计算$I=\iint[\sin x^2\cos y^2+\sin(x-y)dxdy]$

六、（7 分）

计算计算$I=\iiint zdxdydz$,Ω 是由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与旋转抛物面$z=2-x^2-y^2$所围成的立体。

七、（7 分）

求$I=\int\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$,L 是抛物线$y=2x^2-1$上自点 A(-1,1)到 B(1,1)的曲线段

八、(7 分) 求微分方程$y''-2y'+y=xe^{x}+\cos x$通解

九、（7 分）

在曲线上每一代你 M(x,y)处切线在 y 轴上的截距为xy^{3},，且曲线过点$M_{0}(1,1)$,，求此曲线的方程。

十、（5 分）

设 u=u(x,y,z)和 v=v(x,y,z)都在光滑闭曲面Σ围成的立体区域Ω上有连续的二阶偏导数，

$\frac{\partial u}{\partial n}$和$\frac{\partial v}{\partial n}$分别为 u=u(x,y,z)和 v=v(x,y,z)沿曲面Σ上点(x,y,z)处外法线的方向导数

记$\Delta=\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}$,证明：

(1) $\oiint u\frac{\partial v}{\partial n}dS=\iiint u\Delta v dV+\iiint gradu\cdot gradv dV$;

(2) $\oiint\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint(u\Delta v-v\Delta u)dV$

2020-2021 学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、

1、【正解】72

【解析】由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta$ 解出 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ 所以所求等于 $|a||b|\sin\theta=72$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 矢量代数

2.【正解】 $x=-2\sqrt[3]{\dfrac{2y-2}{7y}}$

【解析】原式=$x\dfrac{dy}{dx}=3y(y-1)\quad\Rightarrow\dfrac{dy}{3y(y-1)}=\dfrac{dx}{x}$ 两边同时积分可得 $x=c\sqrt[3]{\dfrac{y-1}{y}}$ 将已知条件带入得到 c=$-2\sqrt[3]{\dfrac{2}{7}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题六 微分方程

3.【正解】12

【解析】

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=12xyz$ 将(1,1,1)代入得到答案 12

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分

4.【正解】-2

【解析】直线 l_1 的方向向量为（1，-1，3）直线 l_2 的切线方程为（4，-2，k）因为两个直线互相垂直，则方向向量点乘为 0 ， 4+2+3k=0 即 k=-2

【考点延伸】《考试宝典》专题七 空间解析几何

5.【正解】 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

【解析】直线的方向向量为 $(1,2t,3t^2)$ ，点(1,1,1)对应 t=1，将 t=1 代入即(1,2,3)则切线方程为答案。

【考点延伸】《考试宝典》专题七 空间解析几何

1. 【解析】 $dz=e^{x+3y}dx^2+x^2de^{x+3y}=2xe^{x+3y}dx+x^2e^{x+3y}(dx+3dy)=3e^4(dx+dy)$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分

2、

【解析】 $I=\oiint y^2dzdx+zdxdy=\iiint_V 2y+1dV$ **由对称性得该式等于** $\iiint_V dV=\frac{4\pi a^3}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》 专题八 重积分

三、

1、**【解析】** 等式两边同求全微分可得：

$$dz=\frac{dx-\varphi'(y-bz)dy}{a-b\varphi'(y-bz)},\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{a-b\varphi'(y-bz)},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-\varphi'(y-bz)}{a-b\varphi'(y-bz)}$$

将两式代入到所求表达式中，所求=1

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分

2、

【解析】 过该直线的平面为

$$\lambda(x+y+z-38)+2x+y+z=0\Rightarrow(2+\lambda)x+(1+\lambda)y+(1+\lambda)z-38\lambda=0$$

$$d^2=\frac{38^2}{3+\frac{8}{\lambda}+\frac{6}{\lambda^2}}$$

对距离平方的分母求导为 0 可得 $\lambda=-\frac{3}{2}$ 时距离最大 此时平面方程为

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}+57=0$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分

3、**【解析】**

$$dx=a(1-\cos t)dt\quad dy=a\sin t dt\ ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$I=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=\frac{256}{15}a^3$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 重积分

四、

1. **【解析】**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2f+x^3yf1'-xyf2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分

2、

【解析】因为其为二元函数的全微分 所以满足 $\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}=\frac{\partial(3y^2-2y+kxy)}{\partial x}\Rightarrow k=-2$

$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2-y^2\Rightarrow u=\frac{x^3}{3}-y^2x+g(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-2y-2xy\ \Rightarrow u=y^3-y^2-xy^2+f(x)$

比较得 $u=\frac{x^3}{3}+y^3-y^2-xy^2-y^2x+C$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分

五

【解析】

由对称性可知原式= $\frac{1}{2}\iint \sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint \sin(x^2+y^2)dxdy$

令 x=rcosθ 则所求式子= $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr=\frac{\pi}{2}(1-\cos 1)$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分

六、

【解析】

使用先二后一原则解得该式= $\int_0^1 z\pi z^2dz+\int_1^2 z\pi(2-z)dz=\frac{11\pi}{12}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分

七、

【解析】

令 $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$,$Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 所以与积分路径无关 所以取路径(-1,1) 到(-1,-1)到(1,-1)到(1,1)

所以所求式子= $\int_{-1}^1\frac{1-y}{1+y^2}dy+\int_{-1}^1\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int_{-1}^1\frac{y+1}{y^2+1}dy=3\int_{-1}^1\frac{1}{y^2+1}dy=\frac{3\pi}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分的计算

八、

【解析】特征方程为 r^2-2r+1 为二重根 齐次方程的通解 $e^x(c_1x+c_2)$ 再根据等式右边的式子，判断该微分方程的通解形式 代入该微分方程 解得结果为

$c_1e^x + c_2xe^x + \frac{e^x x^3}{6} - \frac{1}{2}\sin x$

【考点延伸】《考试宝典》专题六 微分方程

九、

【解析】根据题意 设直线方程$Y = y'(X - x) + y$在 y 轴上的截距为$-xy' + y = xy^3$ 求解该微分方程得 y=$\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2x^3+1}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题六 微分方程

十、

【解析】

（1） 由题意得，设Σ在点(x,y,z)处的外法向量的方向余弦为$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$，由公式知

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$$

则

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n} &= \oiint_{\Sigma} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)dS \\
&= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dxdydz \\
&= \iiint_{\Omega} u\Delta u dxdydz + \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= \iiint_{\Omega} u\Delta u dxdydz + \iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)dxdydz
\end{aligned}$$

即得证

（2）

同理由(1)得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dxdydz = \oiint_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)dxdydz$$

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dxdydz = \oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)dxdydz$$

两式做差得证

【考点延伸】《考试宝典》专题九 重积分

2018-2019 学年第二学期期末考试试卷

一、计算下列各题。

1.设$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求$|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$.

2.设一平面Π过两点$M_1(1,-5,1)$及$M_2(3,2,-2)$，且平行于y轴，求其方程。

3.计算$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt[5]{x^2+y^2}dy$.

二、计算下列各题。

1.设 L 为连接 $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 的直线段，求 $\int_L (x+y)^2 ds$.

2.设 Σ 是球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，计算曲面积分 $\iint_\Sigma (x+y+z)dS$.

3.设 $z=f(xy,2x-3y)$ ，其中 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三、计算下列各题。

1.题目暂缺

2.求解微分方程$xy'' - (1+2x^2)y' = 0$.

3.求解微分方程$y'' + 4y = e^{-4x}$.

四、五、六、七、八题目暂缺（欢迎补充!）

2018-2019 学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、计算下列各题。

1.【解析】由题设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构成直角三角形，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$所以，

$|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|=|3\vec{a}\times\vec{b}|=3\times3\times4=36$.

【考点延伸】矢量代数与空间解析几何　　向量的混合积

2.【解析】设平面方程为$Ax+Cz+D=0$，代入两点得$\begin{cases}A+C+D=0\\3A-2C+D=0\end{cases}$，解得$A=-\frac{3}{5}D,\ C=-\frac{2}{5}D$，

故所求方程为$3x+2z-5=0$.

【考点延伸】矢量代数与空间解析几何　　平面的一般方程

3.【解析】$\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt[5]{x^2+y^2}dy=\iint\limits_D\sqrt[5]{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^{\frac{2}{5}}rdr=\frac{5}{24}\pi$.

【考点延伸】重积分　　利用极坐标计算二重积分

二、计算下列各题

1.【解析】$AB:x+y=1$，$0\le x\le1$，$0\le y\le1$；$\int\limits_L(x+y)^2ds=\int\limits_L 1ds=\sqrt{2}$.

【考点延伸】曲线积分与曲面积分　　对弧长的曲线积分

2.【解析】Σ在xoy面上的投影为：$D_{xy}:x^2+y^2\le1$，利用对称性可以得到

$\iint_\Sigma xdS=\iint_\Sigma ydS=0$，因此$\iint_\Sigma(x+y+z)dS=\iint_\Sigma zdS$，又有$z_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，

$z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，从而有$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{dxdy}{z}$，因此

$\iint_\Sigma(x+y+z)dS=\iint_\Sigma zdS=\iint_{D_{xy}}z\cdot\frac{1}{z}dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy=\pi$.

【考点延伸】曲线积分与曲面积分　　对面积的曲面积分

3.【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1+2f_2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+y(xf_{11}-3f_{12})+2(xf_{21}-3f_{22})=f_1+xyf_{11}+(2x-3y)f_{12}-6f_{22}$

【考点延伸】多元微分及其以应用　　偏导数的定义及其算法　　高阶偏导数

三、计算下列各题。

1.【解析】设Ω_1由$z=\sqrt{x^2+y^2}+1$及$z=2$围成，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega+\Omega_1}zdv-\iiint\limits_{\Omega_1}zdv=\int_0^2 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le1}dxdy-\int_1^2 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le(z-1)^2}dxdy=\int_0^2\pi zdz-\int_1^2\pi z(z-1)^2dz=\frac{17}{12}\pi.$$

【考点延伸】曲线积分与曲面积分　对坐标的曲面积分

2.【解析】令$y'=p,y''=p'$，方程变为$xp'=(1+2x^2)p$，解得$y'=p=C_1xe^{x^2}$，再积分得$y=\frac{C_1}{2}e^{x^2}+C_2$.

【考点延伸】（常）微分方程$y''=f(y,y')$型微分方程

3.【解析】对应的齐次方程的特征方程为$r^2+4=0$，则$r=\pm2i$；得到齐次方程的通解为

$y_1=C_1\cos2x+C_2\sin2x$，设特解$y^*=Ae^{-4x}$，代入方程解得$A=\frac{1}{20}$；从而得到通解为

$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x+\frac{1}{20}e^{-4x}$.

【考点延伸】（常）微分方程二阶常系数线性微分方程的求解

四、计算下列各题

1.【解析】由曲线积分与路径无关得 $xf'(x)+f(x)=4x^3$，易得 $f(x)=\frac{1}{x}(x^4+C)$，代入条件得

$f(x)=x^3+\frac{1}{x}$，于是，$\int_L 4x^3ydx+xf(x)dy=\int_0^4 2(2^3+\frac{1}{2})dy=68$.

【考点延伸】曲线积分与曲面积分　对坐标的曲线积分

2.【解析】设 P 在直线 L 的垂足为 $M(t+4,2t+3,-t)$，则 $\vec{l}=\overrightarrow{PM}=(t+4,2t+2,-t-4)$，由 $\overrightarrow{PM}\perp(1,2,-1)$

得 $t=-2$，$\vec{l}=(2,-2,-2)$，于是，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}$；$f_x(0,1,4)=2$，

$f_y(0,1,4)=2$，$f_z(0,1,4)=8$，因此 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{8}{\sqrt{3}}$.

【考点延伸】多元微分及其以应用　方向导数

五.【解析】由全微分知 $z=x^2-y^2+C$，代入条件得 $C=2$，即 $z=x^2-y^2+2$；$z=f(x,y)$ 在 D 内的驻点为 $(0,0)$，且 $f(0,0)=2$，在边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上，用拉格朗日乘数法，构造拉格朗日函数

$L=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1)$，则 $\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x=0 \\ L_y=-2y+\frac{\lambda y}{2}=0 \\ L_\lambda=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0 \end{cases}$，求出驻点为 $(0,2),(0,-2),(1,0),(-1,0)$；

因为 $f(0,2)=f(0,-2)=-2$，$f(1,0)=f(-1,0)=3$，所以 $z_{\min}=-2,\ z_{\max}=3$

【考点延伸】多元微分及其以应用　条件极值　拉格朗日乘数法

六.【解析】补面 $\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\le 1)$，取上侧；因此

$$\iint_\Sigma y^3dxdz+(y-z)dxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} y^3dxdz+(y-z)dxdy-\iint_{\Sigma_1} y^3dxdz+(y-z)dxdy$$

$$=\iiint_\Omega (3y^2-1)dxdydz-\iint_{x^2+y^2\le 1}(y-1)dxdy=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

【考点延伸】曲线积分与曲面积分　对坐标的曲面积分

七.【解析】由题设 $\frac{dV}{dt}=-kS$，半径为 r 的半球的体积和表面积分别为 $V=\frac{2}{3}\pi r^3$，$S=2\pi r^2$，则

$2\pi r^2\frac{dr}{dt}=2\pi kr^2$，即 $\frac{dr}{dt}=k$，$r=-tk+C$，代入 $r\big|_{t=0}=r_0$，得 $r=-tk+r_0$；又 $V\Big|_{t=3}=\frac{1}{8}V\Big|_{t=0}$，即

$\frac{2}{3}\pi(r_0-3k)^3=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\pi r_0^3$，可得 $k=\frac{1}{6}r_0$，所以 $r=-\frac{1}{6}r_0t+r_0$，故雪堆融化需要 $6h$.

【考点延伸】导数、微分　显函数求导

八.【解析】必要性：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，则 $f_x(0,0)$ 存在，$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}$，存在，则 $\varphi(0,0)=0$.

充分性：$\varphi(0,0)=0$，则 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$，由于 $\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x,y)=\varphi(0,0)=0$，

所以$\underset{3}{\mathrm{hm}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{p}=0$，从而$f(x,y)$在点$(0,0)$可欣。

【考点延伸】多元微分及其以应用　多元函数的连续性

2017-2018 学年第二学期期末考试试卷

一、解答下列各题

1.已知$\vec{a}=2,\vec{b}=3,\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，求$\vec{a}*\vec{b}$.

2.求过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$的直线方程.

3.设$z=f(x,x^2y,3x-e^y)$其中f有连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

4.求方程$x\frac{dy}{dx}-3y=x^2$的通解。

二、计算下列各题

1.计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}(x^2+5y^2-3xy+2x-y)dxdy.$

2.计算 $\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

3.计算 $\int_L yds$ ，其中 $L: y=x^3$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 之间的一段弧。

三、计算下列各题

1.设有曲面$S:\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$，平面$\Pi:2x+2y+z+5=0$，在曲面$S$上求平行于平面$\Pi$的切平面方程.

2.求微分方程$y''-y'-6y=(x+1)e^{3x}$的通解.

3.旋转抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到该椭圆的最长与最短距离。

四、求解下列各题

1. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2x-3y)dv$，$\Omega$是球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$和旋转抛物面$z=x^2+y^2$围成的立体。

2.求$\int\limits_{L}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中$L$为抛物线$2x=\pi y^2$上由点$O(0,0)$到$B(\frac{\pi}{2},1)$的弧段.

五、求解下列各题

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dzdx+(z^2-x^2)dxdy$，其中 Σ 是上半椭球面 $\dfrac{x^2+y^2}{4}+z^2=1$ 的上侧.

2.设函数 $y(x)$ $(x\ge 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0, y(0)=1$.过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1,区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2,并设 $2S_1-S_2$ 恒为1,求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

六、证明题

1.证明：若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 连续，则函数在 (x_0,y_0) 点可微.

2.证明：若 $f_y\left(x_0,y_0\right)$ 存在且 $f_x\left(x,y\right)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，证明 $z=f\left(x,y\right)$ 在 (x_0,y_0) 点可微.

2017-2018 学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、解答下列各题

1、【解析】$\vec{a}*\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\ \vec{b}\right\rangle=2*3*\cos\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}$.

【考点延伸】两个向量的数量积

2、【解析】所求直线方程的方向向量平行于$(2,1,5)$，由直线的对称式方程有$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$.

【考点延伸】空间直线的对称式方程与参数方程

3、【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+2xyf_2+3f_3$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_2-e^yf_3$.

【考点延伸】偏导数的定义及其算法

4、【解析】$y=e^{3\int\frac{1}{x}dx}(\int xe^{-3\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=Cx^3-x^2$.

【考点延伸】常微分方程

二、解答下列各题

1、【解析】原式$=\iint\limits_{x^2+y^2\le4}(x^2+5y^2)dxdy=3\iint\limits_{x^2+y^2\le4}(x^2+y^2)dxdy=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2r^2\cdot rdr=24\pi$.

【考点延伸】利用极坐标计算二重积分

2、【解析】交换积分次序$\int_0^1dy\int_y^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1dx\int_0^x\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1\sin xdx=1-\cos1$.

【考点延伸】利用直角坐标计算二重积分，交换积分次序

3、【解析】$\int_Lyds=\int_0^1x^3\sqrt{1+(x^3)'^2}dx=\int_0^1x^3\sqrt{1+9x^4}dx=\frac{1}{54}(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{10\sqrt{10}-1}{54}$.

【考点延伸】第一型曲线积分的计算方法

三、计算下列各题

1、【解析】曲面S上任意一点(x_0,y_0,z_0)的切平面方程为$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{1}{2}z_0(z-z_0)=0$

该切平面与平面Π平行，则有$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{\frac{1}{2}z_0}{1}=\lambda$，且$2x_0+2y_0+z_0+5\ne0$，

由点(x_0,y_0,z_0)在S上，则$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}=\frac{1}{2}(2\lambda)^2+\lambda^2+\frac{1}{4}(2\lambda)^2=1$，解得：$\lambda=\pm\frac{1}{2}$

于是有$(x_0,y_0,z_0)=\pm(1,\frac{1}{2},1)$，并且不在平面$\Pi$上；

因此，切平面方程为 $x+y+\frac{1}{2}z-2=0,x+y+\frac{1}{2}z+2=0.$

【考点延伸】曲线的切平面与法线

2、【解析】1）相应的齐次方程为$y''-y'-6y=0$，特征方程为$r^2-r-6=0$，特征根为$r_1=-2,r_2=3$,所以齐次微分方程的通解为$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$.

2）由于 3 是特征方程的单特征根，所以非齐次微分方程的特解形式可设为

$y*=x(ax+b)e^{3x}$. 将$y*,y*',y*''$代入原方程得$\begin{cases}10a=1\\2a+5b=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{1}{10},\\b=\frac{4}{25}.\end{cases}$

因此 $y^*=(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25}x)e^{3x}$. 故原方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}+(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25})e^{3x}$.

【考点延伸】常微分方程

3、【解析】空间中任意点 (x,y,z) 到原点距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则目标函数取 d^2，则

$$F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1).$$

解方程组 $\begin{cases}2x+2\lambda x+\mu=0,\\2y+2\lambda y+\mu=0,\\2z-\lambda+\mu=0,\\x^2+y^2-z=0,\\x+y+z-1=0.\end{cases}$ 解得：$x_1=y_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},z_1=2-\sqrt{3}$,则$d_1=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$，

$x_2=y_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},z_1=2+\sqrt{3}$,则$d_1=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$.

由于实际问题确实存在最大值和最小值，故最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$，最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$.

【考点延伸】条件极值　拉格朗日乘数法

四、求解下列各题

1、【解析】由 $\begin{cases}z=\sqrt{1-x^2-y^2},\\z=x^2+y^2.\end{cases}$ 得 $z=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，因此

$$\iiint_{\Omega}(z^2+2x-3y)dv=\iiint_{\Omega}z^2dv=\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}z^2dz\iint_{D_z}dxdy+\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1z^2dz\iint_{D_z}dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\pi z^2zdz+\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1\pi z^2(1-z^2)dz=\frac{69-25\sqrt{5}}{120}\pi.$$

【考点延伸】三重积分的计算方法

2、【解析】$P=2xy^3-y^2\cos x$，$Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x$，所以曲线积分与路径无关

取折线 $\overline{OA}+\overline{AB}$，原式 $=\int_{\overline{OA}}Pdx+Qdy+\int_{\overline{AB}}Pdx+Qdy=\int_0^1(1-2y+\dfrac{3\pi^2}{4}y^2)dy=\dfrac{\pi^2}{4}$.

【考点延伸】如何选择第二型曲线积分的计算方法

五、求解下列各题

1、【解析】补充曲面 $\Sigma_1:z=0\quad(x^2+y^2\le 4)$ 取下侧，则由 Gauss 公式可得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dydz+(z^2-x^2)dxdy=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv=2\iiint_{\Omega}zdv=2\int_0^1zdz\iint_{D_z}dxdy$$

$$=2\int_0^1\pi z(1-z^2)dz=2\pi .$$

而 $\iint_{\Sigma_1}(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dydz+(z^2-x^2)dxdy=\iint_{\Sigma_1}(z^2-x^2)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 4}x^2dxdy$

$$=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2r^2rdr=4\pi .$$

因此 $\iint_{\Sigma}(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dydz+(z^2-x^2)dxdy=2\pi-4\pi=-2\pi$.

【考点延伸】如何选择第二型曲面积分的计算方法

2、【解析】曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$Y-y=y'(x)(X-x)$,它与 x 轴的交点为 $(x-\frac{y}{y'},0)$,由于 $y'(x)>0,y(0)=1$,从而 $y(x)>0$,

于是 $S_1=\frac{1}{2}y\left|x-(x-\frac{y}{y'})\right|=\frac{y^2}{2y'}$.又 $S_2=\int_0^x y(t)dt$,由条件 $2S_1-S_2=1$.知 $\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)dt=1$（*）,

两边对求导并化简得 $yy''=(y')^2$.这是不显含 x 型方程，设 $p=y'$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,

上述方程可化为 $yp\frac{dp}{dy}=p^2$,解得 $p=C_1y$,即 $\frac{dy}{dx}=C_1y$,于是 $y=e^{C_1x+C_2}$.

注意到 $y(0)=1$,并由（*）式得 $y'(0)=1$.由此可得 $C_1=1,C_2=0$,故所求曲线的方程是 $y=e^x$.

【考点延伸】常微分方程

六、证明题

1、【解析】证明：函数增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

用拉格朗日中值定理，得 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x,\theta_1\in(0,1)$

$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\theta_2\in(0,1)$

由于 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 连续，即 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)$,

所以 $f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1$，其中 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1=0$.

同理 $f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2$，因此 $\Delta z=f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$.

而 $\frac{|\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y|}{\rho}\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to0$，则函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微.

【考点延伸】全微分的定义

2、【解析】证明：由于 $f_y\left(x_0,y_0\right)$ 存在，所以有 $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta y)$,

由微分中值定理，有 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta y)$

$=f_x(x_0,y_0)\Delta x+(f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0))\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta y)$ 于是由 $f_x\left(x,y\right)$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 点连续，有 $(f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0))\Delta x=o(\Delta x)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$,

因此上式可写成

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to0)$

即 $z=f\left(x,y\right)$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 点可微。

【考点延伸】全微分的定义

2016-2017 学年第二学期期末考试试卷

一．解答下列各题

1.已知向量$\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(2,1,3),\vec{c}=(0,3,4)$,计算$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

2.设$w=f(x+y^2,xy),f(u,v)$具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$.

3.设函数$u=xy^2+z^3-xyz$在点$(1,1,2)$处沿方向角为$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$方向的方向导数。

4.求微分方程$e^y dx+(xe^y-4y^3)dy=0$的通解。

二.解答下列各题

1.计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$.

2.计算积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

3.求微分方程 $y''-y'-2y=xe^x$ 通解.

三.计算下列各题

1.计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$,其中 Ω 是由圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域。

2.计算积分 $\oint_L (y^2+xy)ds$， L 为圆周 $x^2+y^2=1$.

3.计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 和 $z=2$ 截得部分,取下侧。

四.求解下列问题

1.求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$所确定的函数$z=z(x,y)$的极值。

2.求过直线$L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$且与曲面$2x^2-2y^2+2z=\dfrac{5}{8}$相切的平面方程。

五.求解下列各题

1.设$F(t)$是连续可导函数,$D_t=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le t^2,x,y\ge 0\right\}$.

又设$t\ge 0$时,$F(t)=\iint\limits_{D_t}\dfrac{2xy\left(1-F(\sqrt{x^2+y^2})\right)}{x^2+y^2}dxdy$,且$F(0)=0$,求$F(t)$.

2.计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+(z+1)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,其中$\Sigma$为下半球面$x^2+y^2+z^2=1$且取下侧。

六.证明题

1.设 $f(x,y,z)$ 具有连续偏导数且满足 $xf_x+yf_y+zf_z=0$ 作变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi,$$

证明: $u=f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$ 与 r 无关。

2.设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le a^2$ 上连续，在 $x^2+y^2<a^2$ 内偏导数存在,当 $x^2+y^2=a^2$ 时 $f(x,y)=C$ (C 为常数)。证明:存在 $(x_0,y_0)(x_0^2+y_0^2<a^2)$ 使得 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

2016-2017 学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、解答下列各题

1.【解析】$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&3\\0&3&4\end{vmatrix}=(-5,-8,6)$，$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&3\\0&3&4\end{vmatrix}=-7$

【考点延伸】向量的混合积.

2.【解析】$\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1+yf_2$，$\dfrac{\partial w}{\partial y}=2yf_1+xf_2$

【考点延伸】一元函数与多元函数、多元函数与多元函数复合的情形.

3.【解析】$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,1,2)}=(y^2-yz,2xy-xz,3z^2-xy)\big|_{(1,1,2)}=(-1,0,11)$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=(-1,0,11)\cdot(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2})=5$

【考点延伸】梯度.

4.【解析】由 $\dfrac{\partial(xe^y-4y^3)}{\partial x}=\dfrac{\partial e^y}{\partial y}$，得方程的解为 $xe^y-y^4=C$（C 为常数）

【考点延伸】如何选择第二型平面曲线积分的计算方法.

二、解答下列各题

1.【解析】利用极坐标换元 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot rdr=\dfrac{64}{5}\pi$

【考点延伸】利用极坐标计算二重积分.

2.【解析】交换积分次序 $I=\int_0^1dy\int_0^ye^{-y^2}dx=\int_0^1ye^{-y^2}dy=-\dfrac{1}{2}e^{-y^2}\big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e}$

【考点延伸】利用直角坐标系计算二重积分.

3.【解析】特征方程为 $r^2-r-2=0$，特征根为 $r_1=-1,r_2=2$.则齐次方程通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

由于1不是特征根,所以设特解形式为 $y^*=(Ax+B)e^x$，代入方程求得 $A=-\dfrac{1}{2},B=-\dfrac{1}{4}$

则特解为 $y''=-(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4})e^x$，所以,方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4})e^x$

【考点延伸】二阶常系数线性微分方程的求解.

三、计算下列各题

1.【解析】$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^Rr^2\cdot r^2dr=\dfrac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5$

【考点延伸】三重积分的计算方法.

2.【解析】由对称性可得 $I=\oint_L\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)ds=\dfrac{1}{2}\cdot2\pi=\pi$

【考点延伸】第一型曲线积分的计算方法.

3.【解析】$I=-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le4}\dfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\dfrac{e^r}{r}\cdot rdr=2\pi(e-e^2)$

【考点延伸】如何选择第二型曲面积分积分的计算方法.

四、求解下列问题

1.【解析】由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-1}{2-z}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y+1}{2-z}=0\end{cases}$,得$x=1,y=-1,z_1=-2,z_2=6$

再由$z_{xx}=\dfrac{(2-z)^2+(x-1)^2}{(2-z)^3},z_{xy}=\dfrac{(y+1)(x-1)}{(2-z)^3},z_{yy}=\dfrac{(2-z)^2+(y+1)^2}{(2-z)^3}$

在$(1,-1,-2)$处,$AC-B^2=\dfrac{1}{16}>0,A>0$,函数在该点取得极小值,极小值为$z(1,-1)=-2$;

在$(1,-1,6)$处,$AC-B^2=\dfrac{1}{16}>0,A<0$,函数在该点取极大值,极大值为$z(1,-1)=6$.

【考点延伸】多元函数的极值及最大值、最小值.

2.【解析】令$F=2x^2-2y^2+2z-\dfrac{5}{8}$,则$F_x'=4x,\ F_y'=-4y,\ F_z'=2$,

过直线L的平面束方程为$3x-2y-z-5+\lambda(x+y+z)=0$

即$(3+\lambda)x+(\lambda-2)y+(\lambda-1)z-5=0$.

由已知条件可得$\dfrac{3+\lambda}{4x}=\dfrac{\lambda-2}{-4y}=\dfrac{\lambda-1}{2}=t$,解得$x=\dfrac{2+t}{2t},y=\dfrac{1-2t}{4t},z=-\dfrac{15}{8t^2}$.

代入曲面方程得,$t^2-4t+3=0$,则$t_1=1,t_2=3$,故切面方程为$6x+y+2z=5$或$10x+5y+6z=5$.

【考点延伸】曲面的切平面与法线.

五、求解下列各题

1.【解析】$F(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^t\dfrac{2r^2\cos\theta\sin\theta(1-F(r))}{r^2}\cdot rdr=\int_0^t(1-F(r))\cdot rdr$

两边对t求导,得$F'(t)+tF(t)=t$，解得 $F(t)=1+Ce^{-\frac{t^2}{2}}$.又由$F(0)=0$,得$C=-1$,则$F(t)=1-e^{-\frac{t^2}{2}}$

【考点延伸】利用极坐标计算二重积分.

2.【解析】$I=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+(z+1)^2dxdy$,补充$\Sigma_1:z=0(x^2+y^2\le1)$取上侧,利用$Gauss$公式有

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+(z+1)^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(3+2z)dv=2\iiint\limits_{\Omega}zdv+3\iiint\limits_{\Omega}dv$$

$=2\int_{-1}^0zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le1-z^2}dxdy+2\pi=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi=\dfrac{3\pi}{2}$.而$\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+(z+1)^2dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}dxdy=\pi$,

因此所求积分为$I=\dfrac{3\pi}{2}-\pi=\dfrac{\pi}{2}$.

【考点延伸】如何选择第二型曲面积分积分的计算方法.

六、证明题

1.【解析】$\dfrac{\partial u}{\partial r}=\sin\varphi\cos\theta f_x+\sin\varphi\sin\theta f_y+\cos\varphi f_z=\dfrac{1}{r}(r\sin\varphi\cos\theta f_x+r\sin\varphi\sin\theta f_y+r\cos\varphi f_z)$

$=\dfrac{1}{r}(xf_x+yf_y+zf_z)=0$. 因此$u=f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)$与$r$无关.

【考点延伸】一元函数与多元函数、多元函数与多元函数复合的情形.

2.【解析】由于$f(x,y)$在$x^2+y^2\le a^2$上连续,存在M,m,使得$M=\max\limits_{x^2+y^2\le a^2}f(x,y),m=\min\limits_{x^2+y^2\le a^2}f(x,y)$

以下分两种情况讨论:1)当$M=m$时,此时$f(x,y)=C,(C$为常数).

2)当$M>m$时,由于$x^2+y^2=a^2$时,$f(x,y)=C$,则M,m中至少有一个不等于C,不妨假设存在$(x_0,y_0)(x_0^2+y_0^2<a^2)$,使得$M=f(x_0,y_0)\ne C$,因此有$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$(极值的必要条件).

【考点延伸】多元函数的极值及最大值、最小值.

2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷

一、

1、设$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x) & -1<x\leqslant 0\\ e^{\frac{1}{x-1}} & x>0,x\neq 1\end{cases}$，求$f(x)$的间断点，并指出间断点的类型.

2、求a,b的值，使得$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点.

3、已知两曲线$y=f(x)$与$y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$在点$(0,0)$处的切线相同，写出此切线方程并求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

4、求定积分$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

5、求不定积分$\int xe^{-2x}dx$.

6、计算反常积分$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$.

7、已知$\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

8、判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+a}}(a>0)$的敛散性.

9、设函数$y=f(x)$在$x=0$的某邻域内具有一阶连续导数，且$f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0$，

若$af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to 0$时是比h高阶的无穷小，试确定a,b的值.

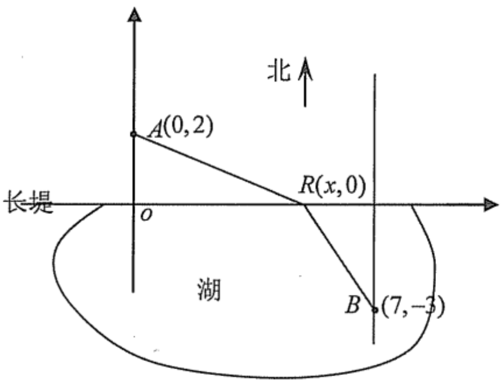
二、**(9 分)**求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}$.

三、**(9 分)**设 $A>0$,D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0$,$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，

V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

四、**(9 分)**设 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，求 $f(0),f'(0),f''(0)$.

五、(9 分)越野赛在湖滨举行，场地如图，出发点在陆地A处，终点在湖心B处，A,B南北相距$5km$，东西相距$7km$，湖岸位于A点南侧$2km$，是一条东西走向的笔直长堤。比赛中运动员可自行选择路线，但必须先从A出发跑步到达长堤，再从长堤处下水游泳到达终点B。已知某运动员跑步速度为$v_1=18km/h$，游泳速度为$v_2=6km/h$，问他应该在长堤的何处下水才能使比赛用时最少？



六、证明题(10 分，每题 5 分，共 2 题)

1、设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,f(1)=\frac{\pi}{4}$，

证明：方程$(1+x^2)f'(x)=1$在$(0,1)$内至少有一个实根.

2、设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，在点$x=0$的某邻域内有一阶连续导数，

且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$条件收敛.

2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、

1、【正解】$x=0$ 为跳跃间断点；$x=1$ 为第二类间断点.

【解析】

因为 $f(x)$ 在 $(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$ 内都是初等函数，所以在这些区间上都是连续的

只需要单独研究 x=0 与 x=1 的情况即可

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$

所以 x=0 是跳跃间断点(这两个极限不相等)

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0 \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

所以 x=1 为第二类间断点

【考点延伸】《考试宝典》专题一【重要题型】题型 4：判断函数连续性和间断点

2、【正解】$a=-\dfrac{3}{2},b=\dfrac{9}{2}$

【解析】因为(1,3)为 $y=ax^3+bx^3$ 的拐点,所以 $y''(1)=0$ 且 $y(1)=3$。

由于 $y'=3ax^2+2bx \qquad y''=6ax+2b$ 从而有 $\begin{cases} y(1)=a+b=3 \\ y''(1)=6a+2b=0 \end{cases}$

解得 $a=-\dfrac{3}{2},b=\dfrac{9}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题三【重要题型】题型 2：求函数拐点和凹凸区间

3、【正解】2

【解析】因为 y=f(x)和 $y=\displaystyle\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点（0,0）处的切线相同

所以 y=f(x)满足：①$f(0)=0 \qquad$ ②$f'(0)=\left[\displaystyle\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt\right]'\Big|_{x=0}=\dfrac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1$

进而 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【重要题型】题型 1：判断导数定义的变形是否正确

4、【正解】$\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

【解析】

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \left[\sqrt{1+t^2}\right]\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题四【重要题型】题型 2：换元积分法及专题五第二部分 2.2 牛顿-莱布尼茨公式

5、【正解】$-\frac{1}{2}e^{-2x}x-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

【解析】$\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int xd(e^{-2x})=-\frac{xe^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{xe^{-2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}+C$

【考点延伸】《考试宝典》专题四【重要题型】题型 3：分部积分法

6、【正解】$\frac{1}{2}\ln 2$

【解析】

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_1^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五第三部分 3.1 反常积分的定义

7、【正解】$\frac{1+t^2}{t}$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=t$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{t}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二第三部分 3.3 参数方程求导

8、【正解】当$a>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+a}}$收敛；当$0<a\leqslant 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+a}}$发散

【解析】$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n+a}}}{\frac{1}{n^a}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，所以由比较审敛法的极限形式知：

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+a}}$和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$有着相同的敛散性。根据 p 级数的性质知：

当$a>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+a}}$收敛；当$0<a\leqslant 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+a}}$发散.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一第二部分 2.1 正项级数及其审敛法

9、【正解】$a=2,b=-1$

【解析】

由题意知$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$

所以有

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\times h$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\lim_{h\to 0}h=0$$

又因为 f(x)在 x=0 处是连续的，所以有$(a+b-1)f(0)=0$。结合$f(0)\neq 0$，所以 a+b=1

因为 f(x)在 x=0 处是可导的，因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)-af(0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{bf(2h)-bf(0)}{h}$$
$$=af'(0)+2bf'(0)=0$$

考虑$f'(0)\neq 0$，从而 a+2b=0

所以解得$a=2,b=-1$

【考点延伸】《考试宝典》专题二【重要题型】题型 1：判断导数定义的变形是否正确

二、【正解】$\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3^2}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{n}{3^n}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}=2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}$$

所以只需要求解$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$即可，下面求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$

考虑幂级数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n,x\in(-1,1)$，只需要计算$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$即可

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}\quad x\in(-1,1)$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一第三部分 3.3 幂级数的运算

三、【正解】$A=\dfrac{8}{\pi}$

【解析】$V_1=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(A\sin x)^2dx=\pi A^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}A^2$

由柱壳法$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(A\sin x)dx=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(-\cos x)=2\pi A\left[-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right]$

$$=2\pi A$$

$\therefore V_1=V_2\Longleftrightarrow\frac{\pi^2}{4}A^2=2\pi A\Longleftrightarrow A=\frac{8}{\pi}$

注：舍去 A=0 是因为题意申明了 A>0

【考点延伸】《考试宝典》专题五第四部分 4.2 体积

四、【正解】$f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)=4$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}\times x=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}\lim\limits_{x\to0}x=3\times0=0$

从而有$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)$在$x\to0$是无穷小，即$x+\frac{f(x)}{x}$在$x\to0$时也是无穷小

所以$x\to0$，$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)\sim x+\frac{f(x)}{x}$

于是原极限等价成$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3\Longrightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$

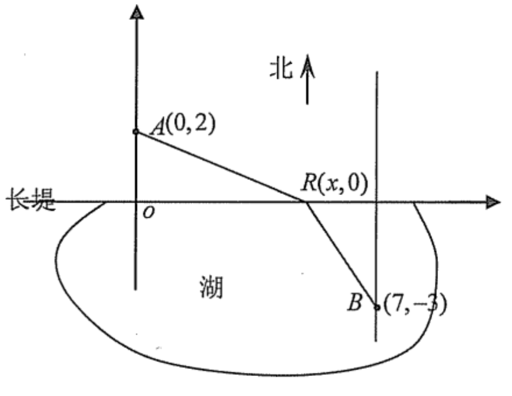
因为$f(x)$在$x=0$处二阶可导，由佩亚诺余项的麦克劳林展开式有：

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\Longrightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=2$

从而$f(0)=0\quad f'(0)=0\quad\frac{f''(0)}{2}=2$，即$f''(0)=4$

【考点延伸】《考试宝典》专题三第三部分 3.4 泰勒中值定理

五、【正解】$x=6$，此驻点是唯一的，则在点$R(6,0)$下水，用时最少.



【解析】如图所示：要求解的目标$=t(AR段用时)+t(RB段用时)$

$$t(AR段用时)=\frac{|AR|}{v_1}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{18} \qquad t(RB段用时)=\frac{|RB|}{v_2}=\frac{\sqrt{(7-x)^2+9}}{6}$$

令$f(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{3}+\sqrt{(7-x)^2+9}\right) \qquad x\in(0,7)$

$$f'(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+\frac{-2(7-x)}{2\sqrt{(7-x)^2+9}}\right)=\frac{1}{6}\left[\frac{x}{3\sqrt{x^2+4}}-\frac{7-x}{\sqrt{(7-x)^2+9}}\right]$$

令$f'(x)=0$，解得$x=6$是$x\in(0,7)$内的唯一驻点

$$f''(x)=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{3\sqrt{x^2+4}}-\frac{x^2}{3}\times(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{(7-x)^2+9}}-(7-x)^2((7-x)^2+9)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$\therefore$经验算$f''(6)=\frac{11}{72\sqrt{10}}>0\Longrightarrow$由极值第二充分条件知$x=6$是极小值点

因为$x=6$是$(0,7)$内的唯一极小值点，所以$x=6$也是最小值点。

综上，在点$R(6,0)$处下水才能用时最少

【考点延伸】《考试宝典》专题三【重要题型】题型 1：求函数极值点

六、证明题(10 分，每题 5 分，共 2 题)

1、【解析】

设$F(x)=f(x)-\arctan x$

$F(1)=f(1)-\frac{\pi}{4}=0 \qquad F(0)=f(0)=0$

因为$F(x)$满足：①在$[0,1]$连续　②在$(0,1)$内可导　③$F(1)=F(0)$

所以由$Rolle$定理知$\exists\xi\in(0,1)$,使得$F'(\xi)=0$

即$f'(\xi)-\frac{1}{1+\xi^2}=0\Longrightarrow(1+\xi^2)f'(\xi)=1$　命题得证

【考点延伸】《考试宝典》专题三第三部分 3.1 罗尔定理

2、【解析】由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，得$f(0)=0,f'(0)=a>0$ (1’)

$f'(x)$在点$x=0$的某邻域内有连续，则存在$\delta>0$，使在$[0,\delta]$上$f'(x)>0$，

因此在$[0,\delta]$上$f(x)$单调增加，于是存在$N>\frac{1}{\delta}$，

当$n>N$时，有$f\left(\frac{1}{n}\right)>0,f\left(\frac{1}{n}\right)>f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛.

$$又 \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}f'(\xi)=f'(0)=a$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$条件收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一第二部分 2.2 绝对收敛与条件收敛

2015-2016 学年第二学期期末考试 B 卷

一、解答下列各题(每题 6 分，共 60 分)

1、设$u=\dfrac{x+y}{x+z}$，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2、若$z=z(x,y)$是由方程$x-az=\varphi(y-bz)$确定的隐函数，这里a,b为常数，$\varphi'(u)$连续，求

$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3、已知平面π过点$A(2,0,0),B(0,-3,0)$，且与三个坐标面所围成的立体体积为 2，求平面π的方程.

4、非零向量a,b,c满足$a=b\times c$，$b=c\times a$，$c=a\times b$，求$|a|+|b|+|c|$的值.

5、计算积分$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$.

6、计算$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中$L:x^2+y^2=ax$（$a>0$）.

7、计算$\oint_L (e^{x^2}-x^2y)dx+(xy^2-\sin y^2)dy$，$L: x^2+y^2=a^2 (a>0)$逆时针方向一周.

8、已知立体$\Omega: \sqrt{3x^2+3y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}$，计算$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$的值..

9、求解初值问题：$\begin{cases} e^x\dfrac{dy}{dx}+2e^x y=1 \\ y|_{x=0}=2 \end{cases}$.

10、在曲面$z=xy$上求一点，使得该点处的法线垂直于平面$x+3y+z+9=0$.

二、（**8 分**）计算$\iint_D |x-y|dxdy$，其中$D:x^2+y^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$.

三、（**8 分**）函数$y=f(x)$在定义域内$f'(x)>0$，其图形上任意一点$M(x_0,y_0)$处的切线与直线$x=x_0$，以及x轴所围成图形的面积为4，$f(0)=2$，求$f(x)$的表达式.

四、（8 分）在平面$x+y+z=1$上求一点P，使得到点P到两定点$A(1,0,1)$，$B(2,1,0)$的距离的平方和最小，并求出这个最小.

五、（8 分）求$I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz+(z^2-z)dxdy$，其中$\Sigma$是曲面$z=x^2+y^2$位于$z=1$，$z=2$之间部分的下侧.

六、（每小题 4 分，共 8 分）

1. 已知$y=x\sin x$是方程$y''+ay'+by=A\cos x+B\sin x$的一个解，（$a,b,A,B$为常数），求$A,B$的值，并写出该方程的通解.

2. 设$P(x,y),Q(x,y)$在光滑有向曲线L上连续，记l表示曲线L的长度，$M=\max\limits_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2+Q^2}$，证明$\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\leqslant M\cdot l$.

2015-2016 学年第二学期期末考试 B 卷参考答案

一、解答题(每题 6 分，共 60 分)

1、【解析】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z-y}{(x+z)^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{(x+z)^2}$.

【考点延伸】一元函数与多元函数、多元函数与多元函数复合的情形.

2、【解析】方程$x-az=\varphi(y-bz)$两边对x求导，得$1-a\dfrac{\partial z}{\partial x}=-b\varphi'\dfrac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{a-b\varphi'}$，

方程两边对y求导，得$-a\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(1-b\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\varphi'\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\varphi'}{b\varphi'-a}$

故$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{a-b\varphi'}{a-b\varphi'}=1$.

【考点延伸】一元函数与多元函数复合的情形.

3、【解析】$V=\dfrac{1}{3}sh,\ s=2\times3\times\dfrac{1}{2}=3\Rightarrow h=2\Rightarrow C_1(0,0,2),\ C_2(0,0,-2)$

所以平面的方向量$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC_1}=(-6,4,-6)$或$\overrightarrow{n_2}=(6,-4,-6)$

故平面方程为$3x-2y+3z=6$或$3x-2y-3z=6$

【考点延伸】求平面方程.

4、【解析】由题可知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$相互垂直，故$|a|=|b|\,|c|$，$|b|=|a|\,|c|$；$|c|=|a|\,|b|\Rightarrow|a|=|b|=|c|=1$

故$|a|+|b|+|c|=3$.

【考点延伸】两个向量的向量积.

5、【解析】交换积分次序$I=\displaystyle\int_0^1\frac{y}{\sqrt{1+y^3}}dy\int_0^{\sqrt{y}}xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}dy$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}d(1+y^3)=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

【考点延伸】利用直角坐标系计算二重积分.

6、【解析】 令$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\quad L:r=a\cos\theta$，

$$原式=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}rad\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos\theta d\theta=2a^2.$$

【考点延伸】利用极坐标计算二重积分.

7、【解析】$\dfrac{\partial(xy^2-\sin y^2)}{\partial x}=y^2$，$\dfrac{\partial\left(e^{x^2}-x^2y\right)}{\partial y}=-x^2$，$D:x^2+y^2\leqslant a^2$

所以$I=\iint_D x^2+y^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{\pi}{2}a^4$.

【考点延伸】格林公式.

8、【解析】积分区域在xoy面投影$D:x^2+y^2\leq 1$，

$$原式=\iint_D dxdy\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz=\frac{1}{3}\iint_D 8-8(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$$

$$=\frac{8}{3}\left(\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^4dr\right)=\frac{8}{5}\pi.$$

【考点延伸】利用直角坐标计算三重积分.

9、【解析】整理方程得：$\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$，

故$y=e^{-\int 2dx}\left(e^{\int 2dx}e^{-x}dx+c\right)=e^{-2x}(e^x+c)$，因为$x=0$，$y=2\Rightarrow c=1$

$y=e^{-x}+e^{-2x}$.

【考点延伸】一阶非齐次线性微分方程.

10、【解析】曲面的法向量$\overrightarrow{n_1}=(y,x,-1)$，平面的法向量$\overrightarrow{n_2}=(1，3，1)$，

因为$\overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}$，$\therefore y=-1$，$x=-3\Rightarrow z=3$，故点为$(-3,-1,3)$.

【考点延伸】曲面的切平面与法线.

二、(**8分**)【解析】用直线$x=y$将D分为两部分，上部分为D_1，下部分为D_2，

$$原式=\iint_{D_1}y-xdxdy+\iint_{D_2}x-ydxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta-\cos\theta)dr+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r^2(\cos\theta-\sin\theta)dr=\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

【考点延伸】利用极坐标计算二重积分.

三、(**8分**)【解析】点$M(x_0,y_0)$，所以切线方程为$y-y_0=y_0'(x-x_0)$，横截距为$x=-\frac{y_0}{y_0'}+x_0$

$$S=\frac{1}{2}(x_0-x)y_0=\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{y_0'}=4，整理得到y'\frac{1}{y^2}=\frac{1}{8}，\quad \frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{8}，\frac{1}{y}=-\frac{x}{8}+c$$

因为$f(0)=2\Rightarrow c=\frac{1}{2}$，$f(x)=\frac{8}{4-x}$.

【考点延伸】可分离变量的微分方程

四、（8 分）【解析】所求值$S=(x-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2$，

令$f(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2+\lambda(x+y+z-1)$，

令$f'_x=4x-6+\lambda=0$，$f'_y=2y-2+\lambda=0$，$f'_z=2z-2+\lambda=0$，$f'_\lambda=x+y+z-1=0$

可得到唯一解$x=1,y=0,z=0$，带入得$S=3$，最小值为 3.

【考点延伸】条件极值 拉格朗日乘数法.

五、（8 分）【解析】补面$\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2=2\\z=2\end{cases}$方向向上，$\Sigma_2:\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=1\end{cases}$方向向下，

$$I_\Sigma=I_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-I_{\Sigma_1}-I_{\Sigma_2}=\iiint_\Omega 2zdv-2\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}dxdy+0$$

$$=\int_1^2 2zdz\iint_{x^2+y^2\leqslant z}dxdy-4\pi=\int_1^2 2\pi z^2dz-4\pi=\frac{2}{3}\pi.$$

【考点延伸】如何选择第二型曲面积分积分的计算方法.

六、（8 分）

1.【解析】将$y=x\sin x$代入，得$2\cos x-x\sin x+a\sin x+ax\cos x+bx\sin x=A\cos x+B\sin x$

所以$a=0,b=1,A=2,B=0$，齐次微分方程的特征方程$r^2+1=0$，$r=\pm i$

齐次解为$y=c_1\sin x+c_2\cos x$，方程通解为$y=c_1\sin x+c_2\cos x+x\sin x$（$c_1,c_2$为常数）.

【考点延伸】二阶常系数线性微分方程的求解.

2.【解析】$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，$\cos\alpha,\cos\beta$为曲线$L$的切向量的方向余弦

$$\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int_L P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta ds\right|\leqslant\left|\int_L\sqrt{P^2+Q^2}ds\right|\leqslant M\int_L ds=Ml\ ,$$

得证.

【考点延伸】两类曲线积分之间的联系.

2014-2015 学年第二学期期末考试 A 卷

一、（30 分，每题 6 分）

1、求点$P_0(1,1,1)$到直线$\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$的距离.

2、求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线与法平面方程.

3、函数$u=xy^2z$在点$(1,-1,1)$沿什么方向的方向导数最大?并求此方向导数的最大值.

4、$u=f(x,xy)$具有二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

5、计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 9}(x^2+y^2-7x+32y+1)dxdy$.

二、（16 分，每题 8 分）

1、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x-3)^n}{2n-1}$的收敛域，并判断$x$在收敛域端点处对应的级数是条件收敛还是绝对收敛。

2、已知点$O(0,0)$与$A(1,1)$，且曲线积分

$I=\int_{OA}(ax\cos y-y^2\sin x)dx+(by\cos x-x^2\sin y)dy$与路径无关，试确定$a,b$的值并求出$I$。

三、（8 分）设$f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant 2)$，将$f(x)$展成余弦级数并计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

四、（8 分）设函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

（1）求偏导数$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$；

（2）讨论$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$在点$(0,0)$处是否连续？

（3）讨论$f(x,y)$在点$(0,0)$处是否可微分？

五、（8 分）设$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$在点$(x,y,z)$处的外法线方向余弦。求$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$；并计算第一型曲面积分$\oiint_{\Sigma}\frac{1}{a}(x^4+y^4+z^4)dS$ Σ是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$.

六、（8 分）已知Σ是$x^2+z^2=a^2,(a>0)$，在$x\geqslant 0$的一半中被$y=0$和$y=h$ $(h>0)$所截下部分的外侧。计算$\iint_{\Sigma}xyzdxdy+xzdydz+z^2dzdx$.

七、（8 分）设某电视机厂生产一台电视机的成本为c，每台电视机的销售价格为p，销售量为x。

假设该厂的生产处于平衡状态，即电视机的生产量等于销售量。根据市场预测，销售量x与销售价格p之间有下面关系：

$$x = Me^{-ap} \qquad (M > 0, a > 0)$$

其中M为市场最大需求量，a是价格系数。同时，生产部门根据对生产环节的分析，对每台电视机的生产成本有如下测算：

$$c = c_0 - k\ln x \qquad (k > 0, x > 1)$$

其中c_0是只生产一台电视机时的成本，k是规模系数。

根据上述条件，应如何确定电视机的销售价格p，才能是该场获得最大的利润？

八、（8 分）想象一下，如果你是一位宇航员，正在赤道正上空离地面 35786 千米的同步卫星往下看地球，所看到的地方就是卫星信号所能覆盖到的区域。

（1）请计算出一颗同步卫星覆盖地球的面积。（设地球为球，半径$R = 6378$千米）

（2）南北两极哪个纬度外是盲区？

（3）在赤道上放几颗卫星能覆盖盲区外所有区域？
注：同步卫星相对于地球静止于赤道上空。

九、证明题（6 分，每题 3 分）

1、已知正项级数$\sum_{i=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：当常数$p > \dfrac{1}{2}$时，级数$\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$收敛。

2、$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：$\int_0^1 e^{f(x)}dx \int_0^1 e^{-f(y)}dy \geqslant 1$.

2014-2015 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、（30 分，每题 6 分）

1、【解析】方法一：　直线上取一点 $P_1(7,2,3)$，$\overrightarrow{P_1P_0}=(-6,-1,-2)$；

$\vec{s}=(1,2,3)\quad \vec{s}\times\overrightarrow{P_0P_1}=(1,16,-11)$　（4 分）

$$d=\frac{\left|\vec{s}\times\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{\vec{s}}=\frac{\sqrt{1+256+121}}{\sqrt{14}}=3\sqrt{3}$$ （6 分）

方法二：设 $P_1(x,y,z)$ 为垂足，则 $x=7+t,\ y=2+2t,\ z=3+3t$　（3 分）

$$\overrightarrow{P_0P_1}=(6+t,1+2t,2+3t)$$

由 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 垂直向量 $(1,2,3)$ 可得：$14t+14=0,t=-1$.垂足为：$(6,0,0)$　（5 分）

因此 $d=3\sqrt{3}$.　（6 分）

【考点延伸】点到直线的距离

2、【解析】方法一：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 两边分别对 x 求导数得，

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\\[2mm]1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$ （2 分）

在点 $(1,-2,1)$ 处解得 $\dfrac{dy}{dx}=0$，$\dfrac{dz}{dx}=-1$，　（4 分）

切线的方向向量为：$(1,0,-1)$，切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程为：$(x-1)-(z-1)=0$，$i.e$　$x-z=0$.　（6 分）

方法二：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$　（2 分）

在点 $(1,-2,1)$ 处球面的法向量为：$(1,-2,1)$

切平面为：$(x-1)-2(y+2)+(z-1)=0$ 即 $x-2y+z-5=0$

曲线的切线为：$\begin{cases}x-2y+z-5=0\\x+y+z=0\end{cases}$　（4 分）

切线的方向向量为：$(1,-2,1)\times(1,1,1)=-3(1,0,-1)$

切线标准式为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程为：$(x-1)-(z-1)=0$，$i.e$　$x-z=0$.　（6 分）

【考点延伸】曲线的切线与法平面

3、【解析】在梯度的方向导数最大　（3 分）

$u_x(1,-1,1)=1$，$u_y(1,-1,1)=-2$，$u_z(1,-1,1)=1$

故方向导数最大的方向为：$(1,-2,1)$　（5 分）

方向导数最大值为梯度的模：$\sqrt{6}$.　（6 分）

【考点延伸】求方向导数和梯度

4、【解析】$u_x=f_1+f_2\cdot y$ （3 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{12}\cdot x+f_2+yf_{22}\cdot x=f_2+xf_{12}+xyf_{22}.$$ （6 分）

【考点延伸】偏微分的算法

5、【解析】计算二重积分 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 9}(x^2+y^2-7x+32y+1)dxdy$

原式 $=\iint_{x^2+y^2\leqslant 9}(x^2+y^2+1)dxdy$ （2 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 r^2\cdot rdr+9\pi$ （5 分）

$=\frac{99}{2}\pi.$ （6 分）

【考点延伸】利用直角坐标系计算二重积分

二、（16 分，每题 8 分）

1、【解析】令 $t=2x-3$，则原级数变为：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{2n-1}$ （2 分）

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1,$$ （4 分）

所以收敛半径为：$R=1$, 当 $t=-1$ 时，级数变为：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 发散。

当 $t=1$ 时，级数为：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$，为交错级数，满足莱布尼兹判定条件，收敛。所以关于 t 的收敛域为：$(-1,1]$，即 $-1<2x-3\leqslant 1$，$1<x\leqslant 2$ （6 分）

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，

所以当 $x=2$ 时，级数条件收敛。 （8 分）

【考点延伸】幂级数及其收敛性

2、【解析】因为曲线积分与路径无关，所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ （2 分）

即 $-by\sin x-2x\sin y=-ax\sin y-2y\sin x$

所以，$a=2, b=2$ （5 分）

因为 $d(x^2\cos y+y^2\cos x)=(ax\cos y-y^2\sin x)dx+(by\cos x-x^2\sin y)dy$，

所以，$I=(x^2\cos y+y^2\cos x)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=2\cos 1.$ （8 分）

【考点延伸】对坐标的曲线积分

三、【解析】将 $f(x)$ 作偶延拓，可以知道延拓成一个连续函数。

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x+1)dx=4$$ （2 分）

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x+1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],\ n=1,2\ldots$$ （5 分）

于是 $f(x)$ 的余弦级数为：$2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{n\pi x}{2}$

可以化简为：$2-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$ （6 分）

由于延拓之后的函数为连续函数，

令 $x=0$，可得： $1=2-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ （7 分）

令 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=A$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{A}{4}$；而

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$，

所以，$A=\frac{\pi^2}{8}+\frac{A}{4}$，解得：$A=\frac{\pi^2}{6}$. （8 分）

【考点延伸】函数展开成傅里叶级数

四、【解析】（1）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有：

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，有：

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{|\Delta x|}=0;$$ （3 分）

对称地求得：当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有：

$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，有：$f_y(0,0)=0$. （5 分）

（2）当点 $P(x,y)$ 沿路径 $y=0$ 趋近原点时，由于

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=0}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{|x|}-\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}$ 不存在。

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f_x(x,y)$ 不存在，因此 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点也不连续。

对称地，$f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点也不连续。 （7 分）

（3）由于：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0$$

所以，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微分。 （8 分）

【考点延伸】在一点连续、偏导数存在、以及可微的关系

五、【解析】球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在(x,y,z)处的外法向方向向量为(x,y,z).

单位化后得：$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{a},\dfrac{y}{a},\dfrac{z}{a}\right)$.

因此：$\cos\alpha=\dfrac{x}{a},\cos\beta=\dfrac{y}{a},\cos\gamma=\dfrac{z}{a}$ （4 分）

$$\oiint_{\Sigma}\frac{1}{a}(x^4+y^4+z^4)dS=\oiint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$$

$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}3x^2+3y^2+3z^2dV$$

（6 分）

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a r^2r^2\sin\varphi dr$$ （7 分）

$$=\frac{12\pi a^5}{5}.$$ （8 分）

【考点延伸】对坐标的曲面积分

六、【解析】(解法一)欲计算$\iint_{\Sigma}z^2dzdx$，由于关于xOz面不存在对称性，因此采用投影法进行计算：

由于在$y=0,y=h$面投影到xOz面后得到的均是一条线，因此可以得到

$$\iint_{\Sigma}z^2dzdx=0.$$ （2 分）

欲计算$\iint_{\Sigma}xzdydz$同样利用投影法：投影在yOz面上得到

$$\iint_{\Sigma}xzdydz=\iint_{D_{yz}}z\sqrt{a^2-z^2}dydz$$

其中$D_{yz}=\{(y,z)|0\leqslant y\leqslant h,-a\leqslant z\leqslant a\}$，利用奇偶性性得到

$$\iint_{\Sigma}xzdydz=\iint_{D_{yz}}z\sqrt{a^2-z^2}dydz=h\int_{-a}^{a}z\sqrt{a^2-z^2}dz=0.$$ （4 分）

欲计算$\iint_{\Sigma}xyzdxdy$同样利用投影法：

因为xyz是关于z的奇函数，所以$\iint_{\Sigma}xyzdxdy=2\iint_{\Sigma1}xyzdxdy$ （6 分）

其中$\Sigma1$是位于xoy面上方的曲面上侧。

$$\iint_{\Sigma1}xyzdxdy=\iint_{D}xy\sqrt{a^2-x^2}dxdy$$

$D=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant h\}$

$$\iint_{D}xy\sqrt{a^2-x^2}dxdy=\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx\int_0^h ydy=\frac{a^3h^2}{6}$$

$$\iint_{\Sigma} xyzdxdy + xzdydz + z^2 dzdx = \frac{a^3 h^2}{3}$$ （8 分）

或者 $$\iint_{\Sigma} xyzdxdy = \iint_{\Sigma} xy\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)dydz = \iint_{\Sigma} xy\frac{z}{x}dydz$$ （6 分）

$$= \iint_{\Sigma} yz^2 dydz = \int_{-a}^{a} z^2 dz \int_0^h ydy = \frac{a^3 h^2}{3}.$$ （8 分）

(解法二)添加曲面Σ_1： $x=0, 0\leqslant y\leqslant h, -a\leqslant z\leqslant a$，方向为与 x 轴正方向相反；

添加曲面Σ_2： $y=0, x^2+z^2\leqslant a^2$，方向为与 y 轴正方向相反；

添加曲面Σ_3： $y=h, x^2+z^2\leqslant a^2$，方向为与 y 轴正方向相同；

利用高斯公式得到

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy = \iiint_{\Omega} (z+xy)dxdydz$$

其中$\Omega = \{(x,y,z)|x^2+z^2=a^2, 0\leqslant y\leqslant h, x\geqslant 0\}$，

利用对称性可以得到$\iiint_{\Omega} zdxdydz = 0$，

因此$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy = \iiint_{\Omega} xydxdydz$$

$$\iiint_{\Omega} xydxdydz = \iint_{D_{xy}} xy\,dxdy \cdot \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy$$

其中$D_{xy} = \{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant h\}$，

$$2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy = 2\int_0^h ydy\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{h^2}{2}\cdot\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$= \dfrac{a^3h^2}{3}$，即$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy = \frac{a^3 h^2}{3}$$

容易得到$\iint_{\Sigma_1} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy = 0$

$$\iint_{\Sigma_2^-} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy = \iint_{\Sigma_3} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma_2} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy + \iint_{\Sigma_3} xzdydz + z^2 dzdx + xyzdxdy = 0$$

而$\iint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} - \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2} - \iint_{\Sigma_3}$，因此

$$\iint_{\Sigma} xyzdxdy + xzdydz + z^2 dzdx = \frac{a^3 h^2}{3}.$$

【考点延伸】如何选择第二型曲面积分的计算方法

七、【解析】设厂家获得的利润为u，则$u=(p-c)x$ （3 分）

构造函数：$F(x,p,c)=(p-c)x+\lambda(x-Me^{-ap})+\mu(c-c_0+k\ln x)$ （5 分）

$$F_x=(p-c)+\lambda+k\frac{\mu}{x}=0$$

$$F_p=x+\lambda aMe^{-ap}=0$$

$$F_c=-x+\mu=0$$ （7 分）

解得：$p=\dfrac{c_0-k\ln M+\frac{1}{a}-k}{1-ak}=\dfrac{ac_0-ak\ln M-ak+1}{a(1-ak)}$. （8 分）

【考点延伸】条件极值 拉格朗日乘数法

八、【解析】(1) $S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$ （2 分）

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2\sin\beta\},z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

β为能覆盖的最大纬度。$h=35786$.

$$S=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R\sin\beta}\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$$

$$=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{R+h}\right)=2\pi R^2\frac{h}{R+h}\approx2.17\times10^8km.$$ （4 分）

(2) $\cos\beta=\dfrac{R}{R+h}$,所以

$$\beta=\arccos\frac{R}{R+h}=\arccos\frac{6378}{42164}=\arccos\frac{3189}{21082}\approx1.42(81.3\text{度})$$

即南北纬1.42 弧度（81.3 度）外是盲区。 （6 分）

(3) 一颗同步卫星能覆盖的经度差为$2\beta\approx2.84$（162.6 度），$6.82/2.84\approx2.21$.

因此至少需要 3 颗同步卫星。 （8 分）

【考点延伸】曲面的表面积

九、【证明】1. $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}\leqslant\dfrac{1}{2}\left((\sqrt{a_n})^2+\left(\dfrac{1}{n^p}\right)^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{n^{2p}}\right)$ （2 分）

当$p>\dfrac{1}{2}$时，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$收敛，根据比较判别法，$\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$收敛。 （3 分）

【考点延伸】正项级数及其敛审法

2.设$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$,

$$I=\int_0^1e^{f(x)}dx\int_0^1e^{-f(y)}dy=\iint_De^{f(x)}e^{-f(y)}dxdy$$ （2 分）

由于区域D关于$y=x$对称，所以$\iint\limits_De^{f(x)}e^{-f(y)}dxdy=\iint\limits_De^{f(y)}e^{-f(x)}dxdy$

于是，$I=\frac{1}{2}\left(\iint_{D}e^{f(x)}e^{-f(y)}dxdy+\iint_{D}e^{f(y)}e^{-f(x)}dxdy\right)$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D}e^{f(x)}e^{-f(y)}+e^{f(y)}e^{-f(x)}dxdy$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\iint_{D}2\sqrt{(e^{f(x)}e^{-f(y)}\cdot e^{f(y)}e^{-f(x)})}dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D}2dxdy=1.$$ （3 分）

【考点延伸】《考试宝典》专题九 【易错考点】 2-2 利用对称性化简二重积分

2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷

一、选择题(16 分，每题 4 分，共 4 题)

1、设向量$\vec{a}=(2,-2,-5)$的起点坐标为(2，1，7)，则（ ）.

A、$\vec{a}$的终点坐标为$(4,-2,1)$　　B、$\vec{a}$的长度为 6

C、$\vec{a}$与y轴的夹角为$\arccos\dfrac{-2}{\sqrt{33}}$　　D、$\vec{a}$在z轴上的投影为 5

2、设平面区域$D:x^2+y^2\leqslant 1;D_1:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$，则下列等式不成立的是（ ）.

A、$\iint\limits_D x\ln(x^2+y^2)d\sigma=0$　　B、$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$

C、$\iint\limits_D |xy|d\sigma=4\iint\limits_{D_1} xyd\sigma$　　D、$\iint\limits_D xy^2d\sigma=4\iint\limits_{D_1} xy^2d\sigma$

3、下列级数中，发散的是（ ）.

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$　　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$

C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}(x>0)$　　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$

4、设函数$z=e^{2x}(x+y^2)$，则$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$是该函数的（ ）.

A、驻点但非极值点　　B、驻点且极小值点

C、驻点且极大值点　　D、极值点但非驻点

二、填空题(16 分，每题 4 分，共 4 题)

1、曲线$x=t^2,y=2t,z=\dfrac{1}{3}t^3$在点$\left(1,\ 2,\ \dfrac{1}{3}\right)$处的切线方程是__________.

2、交换积分次序$\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx=$__________.

3、设$f(x)$可微分，$x-2z=f(y-3z)$，则$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

4、$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$展开成关于$x$的幂级数为__________.

三、计算下列各题（每题 6 分，30 分）

1、求平面方程，使得这个平面垂直于平面$x-y+2z-5=0$，平行于向量$\vec{s}=\left(1,-2,2\sqrt{5}\right)$，并且过点$(5,0,1)$.

2、求二重积分$\iint\limits_{D}\arctan\frac{y}{x}dxdy$，其中 D 由圆$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$及直线$y=0,y=x$所围成的在第一象限的闭区域.

3、设$z=x^2f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，$f$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=2$在锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上方的部分.

5、计算曲线积分$\int_L(x+y)^2ds$，其中L是由点$O(0,0)$到$A(0，1)$的直线段和$y=\sqrt{1-x^2}$上从$A(0，1)$到$B(1，0)$的圆弧组成.

四、(8 分）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$的和函数，并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n\,!}$的和.

五、(8 分）修建一座容积为 V，形状为长方体的地下仓库，已知仓库和墙壁每单位面积的造价分别为地面每单位面积造价的 3 倍和 2 倍，问如何设计长、宽、高使它的造价最小.

六、（8 分）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中$\Sigma$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$的上侧.

七、（8 分）设$f(u)$连续可微，L 为由$A\left(3，\dfrac{2}{3}\right)$到$B(1，2)$的直线段，求

$$\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$$

八、（6 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上满足$a\leqslant f(x)\leqslant b$，$|f'(x)|\leqslant q<1$，令

$u_n=f(u_{n-1}),n=1,2,3,\ldots,u_0\in[a,b]$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$绝对收敛.

2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、选择题(16 分，每题 4 分，共 4 题)

1、【正解】C

【解析】设起点$A(2,1,7)$，终点B，则$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-2,-5)$。

$\overrightarrow{OB}=(2,-2,-5)+(2,1,7)=(4,-1,2)$所以 A 错

对于 B 选项，$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{33}$，所以 B 错

对于 C 选项，$\cos<\widehat{\vec{a},\vec{y}}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{y}}{|\vec{a}||\vec{y}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{33}}$且$<\widehat{\vec{a},\vec{y}}>\in[0,\pi]\Longrightarrow<\widehat{\vec{a},\vec{y}}>=\arccos\dfrac{-2}{\sqrt{33}}$，

所以 C 正确

对于 D 选项，取 z 轴正向的一个向量$\vec{z}=(0,0,1)$，$Prj_{\vec{z}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos<\widehat{\vec{a},\vec{z}}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{z}}{|\vec{z}|}=-5$所以 D 错误

【考点延伸】向量的模、方向角、投影

2、【正解】D

【解析】对于 A 选项，$f(x,y)=x\ln(x^2+y^2)$是关于 x 的奇函数，且积分区域 D 关于 y 轴对称，所以$\iint\limits_D x\ln(x^2+y^2)d\sigma=0$

对于 B 选项，$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$是关于 x 的偶函数，也是关于 y 的偶函数，积分区域 D 既关于 x 轴对称也关于 y 轴对称，所以有$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma$。

对于 C 选项，$f(x,y)=|xy|$是关于 x 的偶函数，也是关于 y 的偶函数，积分区域 D 既关于 x 轴对称也关于 y 轴对称，所以有$\iint\limits_D|xy|d\sigma=4\iint\limits_{D_1}xyd\sigma$。

对于 D 选项，$f(x,y)=xy^2$是关于 x 的奇函数，而积分区域 D 关于 y 轴对称，所以$\iint\limits_D xy^2d\sigma=0$，另一方面，显然有$\iint\limits_{D_1}xy^2d\sigma>0$，从而$4\iint\limits_{D_1}xy^2d\sigma\neq\iint\limits_D xy^2d\sigma$。所以 D 错

【考点延伸】利用对称性化简二重积分

3、【正解】B

【解析】对于 A 选项，这是一个 p 级数，其中 p=2>1，所以根据 p 级数的性质知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛

对于 B 选项，因为$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\times\dfrac{1}{n}=1$，所以根据级数收敛的必要条件，即收敛的级数其通项必以 0 为极限知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$发散

对于 C 选项，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-nx}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^{nx}}$，考虑极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^{tx}}\xlongequal{L'hospital\text{法则}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2t}{xe^{tx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2}{x^2e^{tx}}$

$=0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-nx}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^{nx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^{tx}}=0$。所以根据比较审敛法的极限形式，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$也收敛。

对于 D 选项，这是一个交错级数，所以考虑使用莱布尼茨判别法。

因为满足：① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}=0$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$。所以根据莱布尼茨判别法知：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$收敛

【考点延伸】正项级数及其审敛法以及　绝对收敛与条件收敛

4、**【正解】** B

【解析】因为$z_x'=e^{2x}(2x+2y^2+1)$　　$z_y'=2e^{2x}y$，所以有$z_x'\left(-\dfrac{1}{2},0\right)=0$　　$z_y'\left(-\dfrac{1}{2},0\right)=0$，

即$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$是该函数的驻点。

因$z_{xx}''=4e^{2x}(x+y^2+1)$　　$z_{xy}''=4e^{2x}y$　　$z_{yy}''=2e^{2x}$

考虑 Hessian 矩阵：$H(z)=\begin{bmatrix} z_{xx}'' & z_{xy}'' \\ z_{yx}'' & z_{yy}'' \end{bmatrix}$

有$H(z)\Big|_{\left(-\frac{1}{2},0\right)}=\begin{bmatrix} z_{xx}''\left(-\dfrac{1}{2},0\right) & z_{xy}''\left(-\dfrac{1}{2},0\right) \\ z_{yx}''\left(-\dfrac{1}{2},0\right) & z_{yy}''\left(-\dfrac{1}{2},0\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{bmatrix}$，显见这是个正定矩阵

从而$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$处取极小值

【考点延伸】多元函数的极值及最大值、最小值

二、填空题(16 分，每题 4 分，共 4 题)

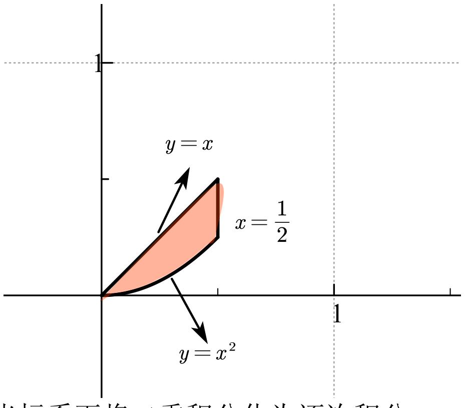
1、**【正解】** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=z-\dfrac{1}{3}$

【解析】因为$x'(t)=2t$　　$y'(t)=2$　　$z'(t)=t^2$，点$\left(1,2,\dfrac{1}{3}\right)$对应的参数 t=1，所以计算得到 $x'(1)=2$　　$y'(1)=2$　　$z'(1)=1$，从而点$\left(1,2,\dfrac{1}{3}\right)$处的切线方程为$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=z-\dfrac{1}{3}$

【考点延伸】空间曲线的切线与法平面

2、**【正解】** $\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$

【解析】首先还原出积分区域，作出以下图像，运用穿线法即可得解



【考点延伸】如何在直角坐标系下将二重积分化为逐次积分

3、【正解】1

【解析】$x-2z=f(y-3z) \Longrightarrow d(x-2z)=df(y-3z) \Longrightarrow dx-2dz=f'[dy-3dz]$

$$\Longrightarrow dx-f'dy=(2-3f')dz \Longrightarrow dz=\frac{1}{2-3f'}dx-\frac{f'}{2-3f'}dy$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2-3f'} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'}{2-3f'}$$

$$\Longrightarrow 2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2-3f'}{2-3f'}=1$$

【考点延伸】一元函数与多元函数、多元函数与多元函数复合的情形

4、【正解】$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}$

【解析】因为$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，所以$\frac{e^x-1}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$

根据幂级数的逐项求导性质知$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right)=\frac{d}{dx}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right)$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{x^{n-2}}{n!}$$

【考点延伸】幂级数的运算

三、计算下列各题（每题 6 分，30 分）

1、【解析】设这个平面为$Ax+By+Cz+D=0$，从而法向量$\vec{n}=(A,B,C)$

因为它垂直于平面$x-y+2z-5=0$，所以$(A,B,C)\cdot(1,-1,2)=0$，即$A-B+2C=0$

又因为平面平行于$\vec{s}$，所以$\vec{n}\cdot\vec{s}=0$，即$A-2B+2\sqrt{5}C=0$

过点$(5,0,1)$得$5A+C+D=0$

$$\begin{cases} A-B+2C=0 \\ A-2B+2\sqrt{5}C=0 \\ 5A+C+D=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\left(2\sqrt{5}-4\right)C \\ B=\left(2\sqrt{5}-2\right)C \\ D=-\left(10\sqrt{5}-19\right)C \end{cases}$$

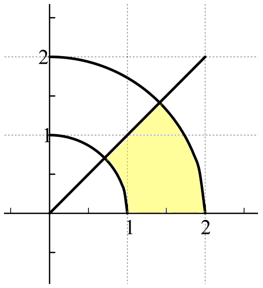
不妨取$C=-1$，所以法向量$\vec{n}=\left(4-2\sqrt{5},2-2\sqrt{5},-1\right)$

所以平面方程为：$\left(4-2\sqrt{5}\right)(x-5)+\left(2-2\sqrt{5}\right)y-(z-1)=0$

【考点延伸】平面的一般方程

2、【解析】$\dfrac{3}{64}\pi^2$

积分区域如图所示：



$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}dx \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 rdr=\frac{3\pi^2}{64}$$

【考点延伸】利用极坐标计算二重积分

3、【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\left(xf_1+\dfrac{1}{x}f_2\right)=x^3f_1+xf_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2f_1+x^3\left(f_{11}y-\frac{y}{x^2}f_{12}\right)+f_2+x\left(f_{21}y-\frac{y}{x^2}f_{22}\right)$$

$$=3x^2f_1+f_2+x^3yf_{11}-\frac{y}{x}f_{22}$$

【考点延伸】一元函数与多元函数、多元函数与多元函数复合的情形

4、【解析】首先先求Σ在xOy面的投影D_{xy}:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2=1 \Longrightarrow D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$$

球面$x^2+y^2+z^2=2$在$z>0$时的方程化为：$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$

从而$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\dfrac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\Longrightarrow I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dS=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{2}}{2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\sqrt{2}\,r}{2-r^2}dr=\sqrt{2}\,\pi\ln 2$$

【考点延伸】第一型曲面积分的计算方法

5、【解析】记$L_1:x=0,0\leqslant y\leqslant 1$　　$L_2:y=\sqrt{1-x^2}$　　$0\leqslant x\leqslant 1$　则$L=L_1+L_2$

$$\therefore \int_L(x+y)^2ds=\int_{L_1}(x+y)^2ds+\int_{L_2}(x+y)^2ds$$

其中$\displaystyle\int_{L_1}(x+y)^2ds=\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}$

对于$\displaystyle\int_{L_2}(x+y)^2ds$，$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

所以$\displaystyle\int_{L_2}(x+y)^2ds=\int_0^1\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t+\cos t)^2}{\cos t}\cos t\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin t\cos t)dt=\frac{\pi}{2}+1$$

$$\Longrightarrow \int_L(x+y)^2ds=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$$

【考点延伸】第一型曲线积分的计算方法

四、【解析】

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'=(xe^x)'=e^x(x+1)\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}=s\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)e^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$$

【考点延伸】幂级数的运算

五、【解析】设地面每单位面积造价为t元，故仓顶的造价为$3t$元/单位面积，墙壁的造价为$2t$元/每单位面积

设仓库的长宽高依次为x,y,z，有约束条件$xyz=V$

所以总造价$W=txy+3txy+2t\times(2xz+2yz)=4t(xy+xz+yz)$

令$F(x,y,z)=4t(xy+xz+yz)+\lambda(xyz-V)$

令$\begin{cases} F_x{}'=4t(y+z)+\lambda yz=0 \\ F_y{}'=4t(x+z)+\lambda xz=0 \\ F_z{}'=4t(x+y)+\lambda xy=0 \\ xyz=V \end{cases} \Longrightarrow x=y=z=\sqrt[3]{V}$

故$\left(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}\right)$是唯一驻点，根据实际问题知一定存在最小值，故最小值在该点取得

即设计长宽高都为$\sqrt[3]{V}$可使得造价最小

【考点延伸】条件极值 拉格朗日乘数法

六、【解析】补平面Σ_1：$x^2+y^2\leqslant 1, z=0$，取其下侧

记Σ_1与Σ围城的封闭区域为Ω，从而由$Gauss$公式知：

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint_{\Omega}(6x^2+6y^2+6z)dV$$

$$\xlongequal{\text{柱坐标}} 6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{1-r^2}(r^2+z)dz=12\pi\int_0^1 r\frac{1-r^4}{2}dr=2\pi$$

从而$I=\iint_{\Sigma_1+\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy-\iint_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$

$$=2\pi-(-1)\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(-3)dxdy=-\pi$$

【考点延伸】对坐标的曲面积分

七、【解析】$P=\dfrac{1+y^2f(xy)}{y}, Q=\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}+f+xyf'=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分与路径无关

$$\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy=\int_{\left(3,\frac{2}{3}\right)}^{(1,2)}\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)+f(xy)(ydx+xdy)$$

$$=\int_{\left(3,\frac{2}{3}\right)}^{(1,2)}d\left[\frac{x}{y}+F(xy)\right]=\left[\frac{x}{y}+F(xy)\right]\Bigg|_{\left(3,\frac{2}{3}\right)}^{(1,2)}=-4$$

其中$F(t)$为$f(t)$的一个原函数

【考点延伸】格林公式

八、【证明】$|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=|f'(\xi_n)(u_n-u_{n-1})|\leqslant q|u_n-u_{n-1}|$

$=q|f(u_{n-1})-f(u_{n-2})|=q|f'(\xi_{n-1})(u_{n-1}-u_{n-2})|\leqslant q^2|u_{n-1}-u_{n-2}|$

$\leqslant\ldots\leqslant q^n|u_1-u_0|\quad 0<q<1$

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$收敛，由比较审敛法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$绝对收敛.

【考点延伸】正项级数及其审敛法以及绝对收敛与条件收敛

2012-2013 学年第二学期期末考试 A 卷

一、选择题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$、$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$的充分必要条件是（　　）.

A、$a_x=b_x$，$a_y=b_y$，$a_z=b_z$；

B、$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$；

C、$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$；

D、$a_x+a_y+a_z=b_x+b_y+b_z$

2、设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，则函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$处（　　）.

A、连续且$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$存在；

B、连续且$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$不存在；

C、不连续且$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$存在；

D、不连续且$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$不存在

3、设Ω是球面$\Sigma:x^2+y^2+z^2=R^2$所围成的闭区域，则下列结果正确的是（　　）.

A、$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv=0$；

B、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\dfrac{4}{3}\pi R^5$；

C、$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=0$；

D、$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=4\pi R^2$

4、下列级数中发散的是（　　）.

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$　C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-1)^n}{4^n}$

5、设$f(u)$连续可微，且$\int_0^4 f(u)du=k\neq0$，其中L为圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$上从原点到点$(2,0)$的部分，则$\int_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=$（　　）

A、0　B、$\dfrac{k}{2}$　C、k　D、$2k$

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、函数$z=f(x,y)$由方程$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$所确定，则$dz=$__________.

2、交换二次积分的次序$\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)dx=$__________.

3、设L为圆周$x^2+y^2=a^2$，则$\oint\limits_L (x+y)^2 dS=$__________.

4、设平面薄板所占区域D由直线$x+y=2$，$x=2$和$y=2$围成，它在点(x,y)处的面密度为y^2，则该薄片的质量为__________.

5、设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$，其收敛半径为__________.

三、计算题（32 分）

1、**（8 分）**一平面通过两平行直线$\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$，和$\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$，

求此平面方程.

2、**（8 分）**设$z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3、（**8 分**）计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是由$yoz$面上曲线$y^2=2z$绕$z$轴旋转而成的曲面与平面$z=8$所围成的闭区域.

4、（**8 分**）计算$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\dfrac{4}{3}y\right)dS$，其中$\Sigma$为平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限的部分.

四、应用题（8 分）

求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内接长方体，使长方体体积最大.

五、计算题（8 分）

计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-xz)dydz+(z^2-xy)dzdx+(x^2-yz)dxdy$，其中$\Sigma$为锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}\quad(0\leqslant z\leqslant h)$的下侧.

六、应用题（8 分）一个体积为V，外表面积为S的雪堆，融化的速度是$\frac{dV}{dt}=-aS$，其中a为正常数，假设在融化过程中雪堆的形状保持为$z=h-\frac{x^2+y^2}{h}$（$z\geqslant 0$），其中$h=h(t)$，问一个高度为h_0的雪堆全部融化消失需要多长时间？

七、证明题（4 分）证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

2012-2013 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、选择题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、**【正解】** C

【解析】向量$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\parallel\vec{a}\iff$存在唯一的实数$\lambda$，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$

$$\iff (b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$$

$$\iff \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\frac{1}{\lambda}$$

从而C正确

【考点延伸】向量的线性运算.

2、**【正解】** B

【解析】$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

因为$\lim\limits_{x\to o^+}\dfrac{|x|}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to o^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$，所以$f'_x(0,0)$不存在

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(y,0)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}$$

同理可知，$f'_y(0,0)$也不存在

$f(0,0)=0$　　$\forall\varepsilon>0$，对于$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$，取$\delta=\varepsilon$，有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|<\delta=\varepsilon$$

从而$f(x,y)$在$(0,0)$处连续

【考点延伸】偏导数的定义及其算法

3、**【正解】** C

【解析】令$x=r\cos\theta\sin\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\varphi$

$0<\theta<2\pi$，　$0<\varphi<\pi$，　$0<r<R$　　$|J|=r^2\sin\varphi$

A选项：$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dV$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}(r\cos\theta\sin\varphi+r\sin\theta\sin\gamma+r\cos\varphi)^2r^2\sin\varphi dr$$

$=\dfrac{4}{5}\pi R^5\neq 0$，$A$ 错误

B 选项：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}(r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\gamma+r^2\cos^2\varphi)^2r^2\sin\varphi dr$

$=\dfrac{4}{5}\pi R^5\neq\dfrac{4}{3}\pi R^5$，$B$ 错误

C 选项：$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dV$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}(r\cos\theta\sin\varphi+r\sin\theta\sin\gamma+r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$

$=0$，C 正确

D 选项：$\oiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dS=R^2\oiint\limits_{\Sigma}dS=R^2\cdot 4\pi R^2=4\pi R^4\neq 4\pi R^2$，$D$ 错误

4、**【正解】**A

【解析】A 选项：由 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$ 可知：$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}\ (x\to\infty)$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1>0$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 也发散，A 正确

B 选项：记 $a_n=\dfrac{1}{3^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}<1$，由比值审敛法知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛

C 选项：$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{n^2+2n}<\dfrac{1}{n^2}$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，根据比较审敛法

有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$ 也收敛

D 选项：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-1)^n}{4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

记 $a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$，$b_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3}{4}<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ 收敛

又b_n单调递减趋于0，由莱布尼茨定理可知：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{也收敛，从而} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{4^n} \text{也收敛}$$

【考点延伸】正项级数及其审敛法

5、**【正解】** B

【解析】$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$

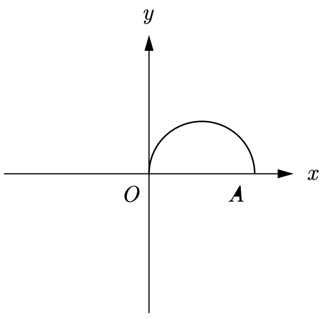
$$=\int_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)+\int_{AO} f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$$

由格林公式得：

$$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$$

$$=(-1)\iint_D[2xyf'(x^2+y^2)-2xyf'(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=0$$



$$\text{又}\int_{AO} f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=-\int_0^2 f(x^2)xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2 f(x^2)dx^2$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx$$

$$=-\frac{k}{2}$$

$$\text{从而}\int_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\frac{k}{2}$$

二、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、**【正解】** $dz=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$

【解析】令$F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$

则$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1$，$F_y=4\cos(x+2y-3z)-2$

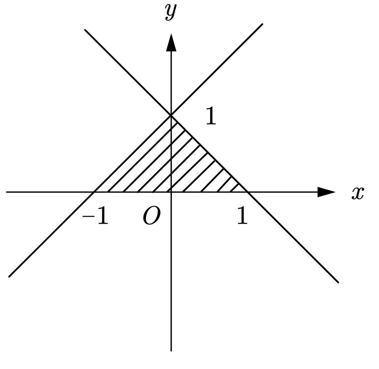
$F_z = -6\cos(x+2y-3z)+3$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{1}{3}$， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2}{3}$

于是 $dz = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy$

2、**【正解】** $\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{x+1}f(x,y)dy + \int_{0}^{1}dx\int_{0}^{-x+1}f(x,y)dy$

【解析】 由 $\int_{0}^{1}dy\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)dx$ 可知积分区域为：



于是 $\int_{0}^{1}dy\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)dx = \int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{x+1}f(x,y)dy + \int_{0}^{1}dx\int_{0}^{-x+1}f(x,y)dy$

【考点延伸】 利用直角坐标系计算

3、**【正解】** $2\pi a^3$

【解析】 令 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$， $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

则 $\oint_L (x+y)^2 dS = \int_0^{2\pi} (a\cos\theta + a\sin\theta)^2 \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2}\, d\theta$

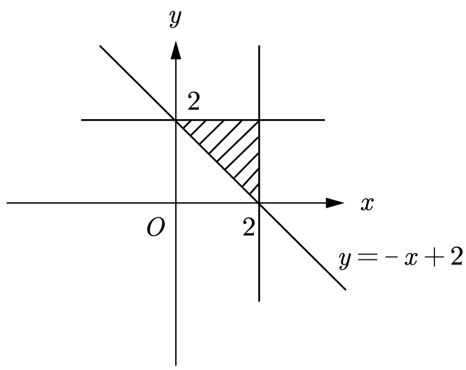
$= 2\pi a^3$

4、**【正解】** 4

【解析】$\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS = \int_0^2 dx \int_{-x+2}^{2} y^2 dy$

$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right) dx$

$= 4$



5、**【正解】** 3

【解析】记 $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

从而收敛半径为3

【考点延伸】幂级数及其收敛性

三、计算题（32 分）

1、【解析】因为点 $P(-3,-2,0)$ 和 $Q(-3,-4,-1)$ 都在所求的平面上，所以平面与向量 $\overrightarrow{PQ} = (0,-2,-1)$ 及 $\vec{s} = (3,-2,1)$ 均平行，----------2 分

即平面法向量可取为

$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-4,-3,6)$.----------5 分

所求平面的方程为：

$-4(x+3) - 3(y+2) + 6(z-0)$，即 $4x + 3y - 6z + 18 = 0$.----------8 分

【考点延伸】两个向量的向量积

2、【解析】$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 - \frac{y}{x^2} f'_2$ ，$\frac{\partial z}{\partial y} = xf'_1 + \frac{1}{x} f'_2$,----------4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y\left(f''_{11} \cdot x + f''_{12} \cdot \frac{1}{x}\right) + f'_1 + \frac{-y}{x^2}\left(f''_{21} \cdot x + f''_{22} \cdot \frac{1}{x}\right) + f'_2 \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 - \frac{1}{x^2} f'_2 + xyf''_{11} - \frac{y}{x^3} f''_{22}$$.----------8 分

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.3——一元函数与多元函数、多元函数与多元函数复合的情形

3、【解析】曲线 $y^2 = 2z$ 绕 z 轴旋转而成的曲面的方程为 $2z = x^2 + y^2$　显然：

$\Omega: \dfrac{x^2+y^2}{2} \leqslant z \leqslant 8$ ，Ω 在 xoy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2 \leqslant 16$ ，----------2 分

所以 $\displaystyle\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^{8} r^2 \cdot r dz$ ----------5 分

$\displaystyle= 2\pi \int_0^4 r^3\left(8-\frac{1}{2}r^2\right)dr = \frac{1024}{3}\pi$ ----------8 分

【考点延伸】三重积分

4、【解析】$\Sigma: z = 4-2x-\dfrac{4}{3}y$ ，$D_{xy}: 0 \leqslant x \leqslant 2$ ，$0 \leqslant y \leqslant 3-\dfrac{3}{2}x$ ，----------2 分

$dS = \sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy = \dfrac{\sqrt{61}}{3}dxdy$ ，----------5 分

$\displaystyle\iint_{\Sigma} \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS = \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}} dxdy = 4\sqrt{61}$.----------8 分

【考点延伸】第一型曲面积分的计算方法

四、应用题（8 分）

【解析】设 (x,y,z) 是球面的各个平行与坐标面的内接长方体在第一卦限的一个顶点，

则次长方体的长宽高分别为 $2x$ ，$2y$ ，$2z$ ，体积为：

$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$

令 $F(x,y,z) = 8xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$.----------3 分

解方程组 $\begin{cases} F_x = 8yz + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 8xz + 2\lambda y = 0 \\ F_z = 8xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 4yz + \lambda x = 0 \\ 4xz + \lambda y = 0 \\ 4xy + \lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases}$ ，----------6 分

得唯一驻点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

由题意可知这种长方体必有最大体积，所以当长宽高都为 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 时

其体积最大. ----------8 分

【考点延伸】条件极值 拉格朗日乘数法

五、计算题（8 分）

【解析】这里$P=y^2-xz$，$Q=z^2-xy$，$R=x^2-yz$．

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-z-x-y\ .\text{----------2 分}$$

设Σ_1为$z=h\ (x^2+y^2\leqslant h^2)$的上侧，$\Omega$为由$\Sigma$与$\Sigma_1$所围成的空间区域，

则由高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}(y^2-xz)dydz+(z^2-xy)dzdx+(x^2-yz)dxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=-\iiint_{\Omega}(z+x+y)dv$$

$$=-\iiint_{\Omega}zdv=-\int_0^h zdz\iint_{D_z}dxdy=-\pi\int_0^h z^3dz=-\frac{\pi}{4}h^4\text{----------5 分}$$

$$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{D}(x^2-yh)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(r^2\cos^2\theta-hr\sin\theta)rdr=\frac{\pi}{4}h^4\ ,$$

所以$\displaystyle\iint_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$

$$=-\frac{\pi}{4}h^4-\frac{\pi}{4}h^4$$

$$=-\frac{\pi}{2}h^4\text{----------8 分}$$

【考点延伸】如何选择第二型曲面积分积分的计算方法

六、应用题（8 分）

【解析】由题设雪堆形状为一个倒置的抛物旋转体。雪堆的高度为h，底面半径也为h.

雪堆体积为：

$$V=\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}\left(h-\frac{x^2+y^2}{h}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\left(h-\frac{r^2}{h}\right)rdr=\frac{\pi}{2}h^3\text{----------3 分}$$

雪堆表面积为：

$$S=\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}\sqrt{1+\frac{4}{h^2}(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\sqrt{1+4\frac{r^2}{h^2}}rdr=\frac{\pi}{6}h^2\left(5\sqrt{5}-1\right)\text{----------6 分}$$

$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}h^3\right)=\frac{3\pi}{2}h^2\frac{dh}{dt}$,于是 $\frac{dV}{dt}=-aS$ 化为 $\frac{dh}{dt}=-\frac{a}{9}\left(5\sqrt{5}-1\right)$,

令$b=\frac{a}{9}\left(5\sqrt{5}-1\right)$积分得到$h=-bt+c$

因为$h(0)=h_0$，所以$h=h_0-bt$.当$t=\frac{h_0}{b}$时，$h=0$

即雪堆全部融化消失需要时间为 $t=\frac{h_0}{b}$.----------8 分

【考点延伸】曲面的表面积

七、证明题（4 分）

【证明】设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$，其收敛半径$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)!}\Big/\frac{n+1}{(n+2)!}=+\infty$

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}\right)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^x-1-x}{x}$$ ----------2 分

$$s(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1-x}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=s(1)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=1$$ ----------4 分

【考点延伸】利用幂级数项级数求和