# 东北大学 2021-2022 学年 秋季学期 线性代数(闭卷 A) 答题纸

条码粘贴处

姓名:____________

学号:____________

班级:____________

考场:____________

**注意事项:**

1. 答卷前,考生请认真核对条形码框内的所有个人信息,确认无误并签名。
2. 主观题请使用用黑色签字笔作答,书写应工整、清晰。
3. 请按题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在试卷、草稿纸上答题无效。
4. 保持卡面清洁,不要折叠,不要弄破。考试结束后请将答题卡、试卷一并上交。

## 主观题答题区

注意:请标明小题号,用黑色笔在答题区作答,超出答题区的答案无效。

一、1.

解:

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -10a_{13} & -2a_{12} \\ -3a_{21} & 5a_{23} & a_{22} \\ 9a_{31} & -15a_{33} & -3a_{32} \end{vmatrix} = (-3)5\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{13} & -2a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ -3a_{31} & -3a_{33} & -3a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-3)5(-2)(-3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = 90.$$

一、2.

解: $E(2+3(4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$AE(2+3(4)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+4a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+4a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+4a_{32} \end{pmatrix}.$$

一、3.

解: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 R(A) = 3.

最高阶非零子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

## 主观题答题区

注意:请标明小题号,用黑色笔在答题区作答,超出答题区的答案无效。

二、1

解: $A = \begin{pmatrix} -1 & -t & 1 \\ -t & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & -t \\ -t & -1 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow -1 < t < 1$;

$|A| = 5t^2 + 4t < 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} < t < 0$;

所以,当 $-\frac{4}{5} < t < 0$ 时,二次型为负定二次型.

二、2.

解: $(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, 2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 因为 $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 10 \neq 0$, 故 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, 2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价,进而同秩,所以,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也无关.

或,因为 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, 2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩大于等于 3,即 3.

二、3. 解:首先,显然有 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

其次,

$[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}] = [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}] + [\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$; $[k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

最后, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}] = a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 \ge 0$, 且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 时, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}] = 0$, 因此,可以断言 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 构成 $R^n$ 上的内积.

## 主观题答题区

注意:请标明小题号,用黑色笔在答题区作答,超出答题区的答案无效。

三、1. 解:因为 A 为 3 阶负定矩阵,所以 $|A| < 0$,特征值都小于 0;故 $A^*$ 的特征值 $|A|/\lambda > 0$,于是从

$A^{*4} - 5A^{*2} + 4E = O$

可知,$A^*$ 的特征值为 1 或 2.

即,$A^*$ 的全部特征值可能为 1,1,1;1,1,2;1,2,2;2,2,2;

于是 $|A^* - 2E| = -1$ 或 $|A^* - 2E| = 0$.

三、2.

解:首先由相似矩阵有相同的迹可得 $z = 2$.

由题可知特征值 2 的代数重数与几何重数是 2

进而 $R(2E - A) = 1$,

$$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -x & 0 & -y \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $x = y = 0$.

三、3. 解:

$\mathscr{A}(f(x)+g(x)) = f(x+1)+g(x+1) = \mathscr{A}(f(x)) + \mathscr{A}(g(x))$

$\mathscr{A}(kf(x)) = kf(x+1) = k\mathscr{A}(f(x))$, 所以 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

$\mathscr{A}(1) = 1$, $\mathscr{A}(x) = x+1$, $\mathscr{A}(x^2) = x^2+2x+1$;

所以有

$$\mathscr{A}(1,x,x^2) = (1,x,x^2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

四、解：因为 S 是齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&-3&1\\2&3&1&-4&5\\4&5&-3&-6&-1\\1&1&-2&-2&-3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$ 的解空间，故 $S$ 是 $R^5$ 的子空间；

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&-3&1\\2&3&1&-4&5\\4&5&-3&-6&-1\\1&1&-2&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-7&0&-12\\0&1&5&0&7\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1=7x_3+12x_5\\x_2=-5x_3-7x_5\\x_4=2x_5\end{cases};$$

所以，S 为 2 为线性空间，$\begin{pmatrix}7\\-5\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12\\-7\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ 为其一组基.

五、

解：因为 $3\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关，进而由行列式等于 0 可得到 $x=-2$.

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&2&3\\2&-1&y&-2&2&0\\3&2&4&4&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1&2&3\\0&-1&-2&1&-3&-2\\0&0&y+2&-7&7&0\end{pmatrix},$$

故 $y\neq-2$；

$$\begin{pmatrix}1&2&3&3\\-2&2&0&y+8\\4&3&7&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&-5&-5&-3\\0&0&0&y+52/5\end{pmatrix},$$

故 $y\neq-52/5$.

**主观题答题区**

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

六、解：

因为 $\begin{vmatrix}2&1&6&8\\1&2&3&5\\1&4&1&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$，所以这四个点共面，

因为根据行列式性质，向量组 $B-A$，$C-A$，$D-A$ 线性相关，存在一个向量可由其它两个向量线性表示，因此，这四个点必共面.

七、解：

$$f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$$
$$=-4(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，即，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1/2&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，所得规范形为 $y_1^2-y_2^2$.

进一步地，根据惯性定理可知，该二次型矩阵的特征值中含有一个正特征值和一个负特征值.

**主观题答题区**

注意：请标明小题号，用黑色笔在答题区作答，超出答题区的答案无效。

八、解：方法一：利用顺序主子式大于 0 法；　　顺序主子式为 3, 9, 12

方法二：利用特征值大于 0 法；　　特征值为 1，3，4

方法三：利用合同于单位矩阵法；

方法四：利用正惯性指数等于 3；

方法五：利用可分解为某个可逆矩阵与其转置矩阵的乘积；

方法六：利用可分解为某个正定矩阵的平方法.

九、

证明：

(1) 令 $k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1A\boldsymbol{\alpha}+k_2A^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{s-1}A^{s-1}\boldsymbol{\alpha}+k_sA^s\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，现用 $A^s$ 左乘上式两边，则有 $k_0=0$. 以此类推，可以得出 $k_0=k_1=\cdots=k_{s-1}=k_s=0$，

即向量组 $\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,A^{s-1}\boldsymbol{\alpha},A^s\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，

(2) 不存在满足 $A^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，但是 $A^n\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 的向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 反证法，若存在，则 $\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,A^{n-1}\boldsymbol{\alpha},A^n\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，但是 n+1 个 n 维向量必线性相关，矛盾！因此不存在满足 $A^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，但是 $A^n\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 的向量 $\boldsymbol{\alpha}$.