学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

东北大学考试试卷（B　闭卷）

2018 — 2019 学年　秋季　学期

课程名称：线性代数

总分	一	二	三	四	五	六

得分：

一．（5分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是任意的三维列向量.

试求： $-|\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4|\boldsymbol{\alpha}_1+|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4|\boldsymbol{\alpha}_2-|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_4|\boldsymbol{\alpha}_3+|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|\boldsymbol{\alpha}_4$.

（注：$|\boldsymbol{\alpha}_i\ \boldsymbol{\alpha}_j\ \boldsymbol{\alpha}_k|$ 是由 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_k$ 作为三个列构成的行列式）

解：　显然，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性相关的（四个三维向量必线性相关），存在一个能由其余线性表出，不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

于是 $|\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4|=k_1|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|$， $|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4|=-k_2|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|$， $|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_4|=k_3|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|$

所以 $-|\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4|\boldsymbol{\alpha}_1+|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4|\boldsymbol{\alpha}_2-|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_4|\boldsymbol{\alpha}_3+|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|\boldsymbol{\alpha}_4=$

$$-k_1|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|\boldsymbol{\alpha}_1-k_2|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|\boldsymbol{\alpha}_2-k_3|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|\boldsymbol{\alpha}_3+|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|\boldsymbol{\alpha}_4=\vec{\mathbf{0}}$$

得分：

二．（5分） 设 A 为 3 阶实对称矩阵，1, 2, 3 是矩阵 A 的三个特征值，ξ_1, ξ_2, ξ_3 是分别属于特征值 $1,2,3$ 的三个特征向量，满足长度分别为 $|\xi_1|=3$，$|\xi_2|=2$，$|\xi_3|=1$．现构造矩阵 $P=(\xi_1+\xi_2,\ \xi_2+\xi_3,\ \xi_3-\xi_1)$，

试求 P^TAP .　　（注：$\mathbb{R}^3$ 中的内积按通常定义）

解：方法一：$P^TAP=\begin{pmatrix}\xi_1^T+\xi_2^T\\ \xi_2^T+\xi_3^T\\ \xi_3^T-\xi_1^T\end{pmatrix}(\xi_1+2\xi_2,\ 2\xi_2+3\xi_3,\ 3\xi_3-\xi_1)$

所以　$P^TAP=\begin{pmatrix}17 & 8 & -9\\ 8 & 11 & 3\\ -9 & 3 & 12\end{pmatrix}$

方法二：由 $\xi_i^TA\xi_i=\lambda_i\xi_i^T\xi_i=\lambda_i|\xi_i|^2$ 和 $\xi_j^TA\xi_i=\lambda_i\xi_j^T\xi_i=0$

得分：

三．（5分）

（1）验证函数集合 $\{(a_1x+a_0)\sin x+(b_1x+b_0)\cos x\,|\,a_0,a_1,b_0,b_1\in\mathbb{R}\}$ 对于函数的线性运算构成实数域上的线性空间.

（2）求微分运算 $\mathscr{D}$ 在基 $x\sin x,\ \sin x,\ x\cos x,\ \cos x$ 下的矩阵.

解：(1)　根据线性空间的定义验证.

(2)　$\mathscr{D}(x\sin x)=\sin x+x\cos x$；　$\mathscr{D}(\sin x)=\cos x$；

$\mathscr{D}(x\cos x)=\cos x-x\sin x$；　$\mathscr{D}(\cos x)=-\sin x$

$$\mathscr{D}(x\sin x,\ \sin x,\ x\cos x,\ \cos x)=(x\sin x,\ \sin x,\ x\cos x,\ \cos x)\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

学　院
班　级
学　号
姓　名

密　封　线

得分：

四.（5 分）已知 7 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，以增广矩阵 $(A\ \boldsymbol{\beta})$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间维数是 3.

求：齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数.

解：　因为 8 元齐次线性方程组 $(A\ \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间维数是 3

所以矩阵 $(A\ \boldsymbol{\beta})$ 的秩为 5.

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，所以矩阵 A 的秩等于 4

进而 7 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数是 3.

得分：

五.（5 分） 设 A 为 3 阶正定矩阵，满足 $(A-E)(A-2E)(A+3E)=O$，已知 3 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}$ 至少存在两个线性无关解向量，试写出二次型 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ 用正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 所化出的标准形，并说明理由.

解：因为矩阵 A 是正定的，因此其特征值可能为

1, 1, 1；1, 1, 2；1, 2, 2；2, 2, 2　这四种可能

因为 $Ax=x$ 至少存在两个线性无关解向量，所以矩阵 A 有 1 为特征值，且代数重数大于等于 2，从而矩阵 A 的特征值可能为 1, 1, 1 或 1, 1, 2.

于是二次型 x^TAx 用正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 所化出的标准形可能为

$y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 或 $y_1^2+y_2^2+2y_3^2$.

得分：

六.（5 分）已知在以 O 为原点的平面直角坐标系 $O-XY$ 中，点 P,Q,R 的坐标分别为 $(2,\ 2)^T$，$(1,\ 3)^T$，$(4,\ 8)^T$. 现以 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 为基向量，

求：（1）点 R 在基 $\{\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\}$ 下的坐标；

（2）除原点以外，是否存在其它的点，使得它们在基 $\{\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\}$ 和基 $\{(1,\ 0)^T,(0,\ 1)^T\}$ 下的坐标相同，请说明理由.

解：令 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，于是 $\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}=\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$，进而

$$\overrightarrow{OR}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}=\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$$

$$=\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}\begin{pmatrix}3/4&-1/4\\-1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}=\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

设 $\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 或者 $\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$

因为该齐次线性方程组存在非零解，所以存在这样的点，其在这两个基中的坐标相同，例如：$(k,-k)^T,k\in\mathbb{R}$.